

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 13 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (0, 1, 2), \quad B = (3, -1, 0), \quad C = (1, 1, 1).$$

- (a) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B, C .
- (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C .
- (c) Determinare il punto della retta AC più vicino all'asse x .

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b , il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned}x + ay + 4z &= 4, \\x - z &= 7, \\y + 5z &= b.\end{aligned}$$

- (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ha soluzioni.
- (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha soluzione unica.
- (c) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha infinite soluzioni, ed in tali casi determinare anche l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz.$$

- (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a .
- (b) Nel caso particolare $a = 7/4$, determinare una terna di numeri interi (x, y, z) tali che $q(x, y, z) < 0$.

4. Consideriamo, nello spazio \mathbb{R}^3 , il piano p di equazione $x - y + 3z = 0$ e il punto $Q = (1, -2, 4)$.

- (a) Scrivere la matrice che, rispetto alla basa canonica, rappresenta la proiezione ortogonale su p .
- (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine di p quando si esegue la simmetria centrale rispetto a Q .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.