

# Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 13 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (0, 1, 2), \quad B = (3, -1, 0), \quad C = (1, 1, 1).$$

- (a) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per  $A, B, C$ .
  - (b) Determinare il punto della retta  $AB$  più vicino a  $C$ .
  - (c) Determinare il punto della retta  $AC$  più vicino all'asse  $x$ .
2. Consideriamo, al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ , il sistema lineare (nelle incognite  $(x, y, z)$ )

$$\begin{aligned} x + ay + 4z &= 4, \\ x - z &= 7, \\ y + 5z &= b. \end{aligned}$$

- (a) Determinare per quali valori di  $a$  e  $b$  il sistema non ha soluzioni.
  - (b) Determinare per quali valori di  $a$  e  $b$  il sistema ha soluzione unica.
  - (c) Determinare per quali valori di  $a$  e  $b$  il sistema ha infinite soluzioni, ed in tali casi determinare anche l'insieme delle soluzioni.
3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz.$$

- (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale  $a$ .
  - (b) Nel caso particolare  $a = 7/4$ , determinare una terna di numeri interi  $(x, y, z)$  tali che  $q(x, y, z) < 0$ .
4. Consideriamo, nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , il piano  $p$  di equazione  $x - y + 3z = 0$  e il punto  $Q = (1, -2, 4)$ .
- (a) Scrivere la matrice che, rispetto alla basa canonica, rappresenta la proiezione ortogonale su  $p$ .
  - (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine di  $p$  quando si esegue la simmetria centrale rispetto a  $Q$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.