Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, ?? Giugno 2022

1. Consideriamo nello spazio la retta r che passa per il punto $(0, 1, 1)$ ed il punto $(a, 2, 3)$. Determinare per quali valori del parametro reale a la retta r

   (a) interseca il piano xy (cioè il piano che contiene l'asse x e l'asse y),

   (b) è parallela al piano $3x + y + 4z = 7$,

   (c) forma con il piano di equazione $x - z = 0$ un angolo θ tale che

   $$\cos\theta = \sqrt{\frac{27}{28}}.$$

2. Consideriamo la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A

   (a) è diagonalizzabile sui reali,

   (b) è diagonalizzabile sui complessi,

   (c) rappresenta un'applicazione lineare non iniettiva (in tal caso determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale).

3. (a) Determinare una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

   $$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + 8yw < 0.$$

   (b) Determinare per quali valori del parametro reale a esiste una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

   $$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + ayw < 0.$$

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 1$.

   (b) Determinare l'immagine e la controimmagine dell'asse y rispetto a tale trasformazione.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio la retta r che passa per il punto $(0, 1, 1)$ ed il punto $(a, 2, 3)$.
Determinare per quali valori del parametro reale a la retta r

   (a) interseca il piano xy (cioè il piano che contiene l'asse x e l'asse y),
   (b) è parallela al piano $3x + y + 4z = 7$,
   (c) forma con il piano di equazione $x - z = 0$ un angolo θ tale che

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{27}{28}}.$$

Retta r in parametrica: $(0,1,1) + t(a,1,2) = (at, 1+t, 1+2t)$

(a) Il piano xy ha equazione $z=0$. La retta lo interseca $\boxed{\text{per ogni } a}$ quando $t = -\frac{1}{2}$ nel p.to $\left(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

(b) La direzione della retta deve essere $\perp$ a $(3,1,4)$, cioè $3a + 1 + 8 = 0$, cioè $\boxed{a = -3}$

Verifica: $3at + 1 + t + 4 + 8t = 7 \rightsquigarrow (3a+9)t = 2 \rightsquigarrow$ impossibile se $a = -3$

(c) $$\frac{\langle (a,1,2),(1,0,-1)\rangle}{\sqrt{a^2+5}\,\sqrt{2}} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{27}{28}} = \pm\frac{1}{\sqrt{28}}$$

Otteniamo quindi $\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \rightsquigarrow 14(a-2)^2 = a^2 + 5$

$\rightsquigarrow 14(a^2 + 4a + 4) = a^2 + 5$

$\rightsquigarrow 13a^2 + 56a + 51 = 0$

$\rightsquigarrow a = \dfrac{28 \pm \sqrt{121}}{13} = \dfrac{28 \pm 11}{13} = \nearrow \boxed{3}$, $\searrow \boxed{\dfrac{17}{13}}$

— o — o —

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A

(a) è diagonalizzabile sui reali,

(b) è diagonalizzabile sui complessi,

(c) rappresenta un'applicazione lineare non iniettiva (in tal caso determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale).

Calcoliamo il pol. caratteristico: $\begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$\text{Det} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2a = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2a$

Il discriminante è $25 - 24 + 8a = 8a+1$

- Se $8a+1 > 0$, cioè $a > -\frac{1}{8}$, ci sono due radici reali distinte
- Se $8a+1 < 0$, cioè $a < -\frac{1}{8}$, non ci sono radici reali, ma due radici complesse coniugate distinte
- Se $8a+1 = 0$, cioè $a = -\frac{1}{8}$, allora l'unico autovalore è $\lambda = \frac{5}{2}$ (metà della traccia) con molteplicità alg $=2$ e geom. $=1$

$A - \frac{5}{2}\,\text{Id} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ rango 1

(a) È diag. sui reali $\boxed{\text{se e solo se } a > -\frac{1}{8}}$

(b) È diag. sui complessi $\boxed{\text{se e solo se } a \neq -\frac{1}{8}}$

(c) Rappresenta un'appl. non iniettiva se e solo se $\det = 0$, cioè $\boxed{\text{se e solo se } a = 3}$

In tal caso

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\lambda = 0$ con autovettore $(3, -2)$

$\lambda = 5$ con autovettore $(1, 1)$

Quindi

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Verifica che $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

— o — o —

3. (a) Determinare una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + 8yw < 0.$$

(b) Determinare per quali valori del parametro reale a esiste una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + ayw < 0.$$

(a) Completiamo i quadrati

$$x^2+2xz+2z^2+3y^2+8yw+5w^2$$
$$= (x+z)^2+z^2+3\left(y^2+\frac{8}{3}yw+\frac{5}{3}w^2\right)$$
$$= (x+z)^2+z^2+3\left(y^2+\frac{8}{3}yw+\frac{16}{9}w^2-\frac{16}{9}w^2+\frac{5}{3}w^2\right)$$
$$= (x+z)^2+z^2+3\left(y+\frac{4}{3}w\right)^2-\frac{1}{3}w^2$$

Basta quindi scegliere $(x,y,z,w) = \boxed{(0,-4,0,3)}$

↑ Verifica sostituendo nel testo

(b) Scriviamo la matrice associata alla forma quadratica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-2-3-4.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Det } 1\times1 = 1 \\ \text{Det } 2\times2 = 3 \\ \text{Det } 3\times3 = 3 \end{array}\right\}$$

Esiste un s.sp. di dim 3 su cui è def. pos., quindi almeno 3 autovalori positivi

$$\text{Det } 4\times4 = 30-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}-15 = 15-\frac{a^2}{4}$$

Affinché esista una direzione di negatività, l'unica possibilità è che la segnatura sia $+++-$, cioè det <0, cioè $15-\frac{a^2}{4}<0$, cioè $a^2>60$

cioè $\boxed{a<-\sqrt{60} \text{ oppure } a>\sqrt{60}}$

— o — o —

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 1$.

(b) Determinare l'immagine e la controimmagine dell'asse y rispetto a tale trasformazione.

(a) Scriviamo intanto la simmetria rispetto alla retta $y=2x$.

Deve verificare $f(1,2)=(1,2)$, $f(-2,1)=(2,-1)$

$f(v_1)=v_1 \qquad f(v_2)=-v_2$

Nella base $\{v_1,v_2\}$ la matrice è $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, quindi nella base canonica è

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&+\frac{3}{5}\end{pmatrix}}$$

Ora spostiamo l'origine in $P_0=(0,1)$

$$(x,y)\rightsquigarrow(x,y-1)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&+\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\boxed{\left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5},\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}\right)}$$

verifica che i p.ti fissi siano $y=2x+1$

(b) Essendo una simmetria, immagine e controimmagine coincidono, perché applicando due volte la simmetria si ottiene l'identità.

Si tratta quindi della retta

$$\underbrace{-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}}_{\text{prima coordinata}}=0 \qquad \text{cioè} \qquad \boxed{3x-4y+4=0}$$

Alternativa: calcolare l'immagine di $(0,t)=\left(\underbrace{\frac{4}{5}t-\frac{4}{5}}_{x},\ \underbrace{\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}}_{y}\right)$

che passata in cartesiana fornisce la stessa equazione.