Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

# Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 16 Gennaio 2024

1. Consideriamo l'insieme
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ x + y^2 - z = 1,\ y \in [-1, 1]\right\}$$
e la funzione
$$f(x, y, z) = x + z.$$
Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x, y, z)$ in $A$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x, y) = \sin(xy) - x \sin y.$$
   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.

   (b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine minore o uguale a 6 di $f(x, y)$, calcolate nell'origine.

   (c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x, y)$ su tutto il piano.

   (d) (Bonus question) Per ogni numero reale $L > 0$ sia $Q_L$ il quadrato $[0, L] \times [0, L]$. Determinare, al variare del parametro reale $\alpha$, il
$$\lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L^\alpha} \int_{Q_L} |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

3. Consideriamo l'insieme
$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \leq 3\right\}.$$
   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente al bordo di $V$ nel punto $(1, -1, -1)$.

   (b) Calcolare
$$\int_V (x - z)^2\, dx\, dy\, dz.$$

4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, y, y - z)$.

   (a) Determinare un campo vettoriale $F$ tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcolare il flusso di $E$ attraverso il triangolo con vertici nei punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, orientato nella direzione uscente rispetto all'origine.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ x + y^2 - z = 1,\ y \in [-1, 1]\}$$

e la funzione

$$f(x, y, z) = x + z.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x, y, z)$ in $A$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

$$x^2 + z^2 = 1 + y^2 \underset{|y| \le 1}{\le} 2 \quad \rightsquigarrow \quad |x| \le \sqrt{2},\ |z| \le \sqrt{2},\ |y| \le 1$$

Quindi $A$ è compatto. Essendo $f$ continua, max/min esistono per teo. Weierstrass.

L'insieme $A$ non ha p.ti interni, cioè è tutto bordo, e in particolare è i luogo di zeri di due funzioni $g_1$ e $g_2$

$\boxed{\text{1° sistema}}$ $\begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 1 & 2y & -1 \end{pmatrix}$ Rango $\le 1$ se $\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ y - 2yz = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $\nearrow y = 0$, $\searrow y \ne 0$

Caso 1 $y = 0 \rightsquigarrow z = -x \rightsquigarrow \underbrace{2x^2 = 1 \text{ e } 2x = 1}_{\text{equazioni di } A}$, $\rightsquigarrow$ impossibile

Caso 2 $y \ne 0 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \underbrace{\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{4} = 1}_{x^2 - y^2 + z^2 = 1} \rightsquigarrow$ impossibile

$\boxed{\text{2° sistema}}$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ 0 = -2\lambda y + 2\mu y \\ 1 = 2\lambda z - \mu \end{cases}$$ $\nearrow y = 0$, $\searrow y \ne 0$

Caso 1 $y = 0 \rightsquigarrow x^2 + z^2 = 1,\ x - z = 1$

$\rightsquigarrow (x, z) = (1, 0)$ opp $(0, -1)$

Caso 2 $y \ne 0 \rightsquigarrow \lambda = \mu$ (diversi da 0)

$2\lambda x + \lambda = 2\lambda z - \lambda \rightsquigarrow z = x + 1$

$\rightsquigarrow y^2 = 2 \rightsquigarrow$ incompatibile con $y \in [-1, 1]$

2ª eq. di A

Restano i p.ti di taglio: $y = \pm 1 \rightsquigarrow x^2 + z^2 = 2,\ x - z = 0 \rightsquigarrow (x, z) = (\pm 1, \pm 1)$ (stesso segno)

Sostituiamo tutti i candidati

$f(1, \pm 1, 1) = 2$

$f(-1, \pm 1, -1) = -2$

$f(1, 0, 0) = 1$

$f(0, 0, -1) = -1$

| | |
|---|---|
| Max = 2 | p.ti max: $(1, \pm 1, 1)$ |
| min = −2 | p.ti min: $(-1, \pm 1, -1)$ |

2. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \sin(xy) - x \sin y.$$

(a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.

(b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine minore o uguale a 6 di $f(x, y)$, calcolate nell'origine.

(c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x, y)$ su tutto il piano.

(d) (Bonus question) Per ogni numero reale $L > 0$ sia $Q_L$ il quadrato $[0, L] \times [0, L]$. Determinare, al variare del parametro reale $\alpha$, il

$$\lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L^\alpha} \int_{Q_L} |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

$$f(x,y) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 - x\left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5\right) + o((x^2+y^2)^3)$$

$$= \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{6}x^3y^3 - \frac{1}{120}xy^5 + o(\rho^6)$$

(a) L'origine è un p.to stazionario perché in $P_6$ "non ci sono" i termini di primo grado. Inoltre

$$f(t^2, t) = \sin(t^3) - t^2 \sin t = \frac{1}{6}t^5 + o(t^5)$$

cambia segno in un intorno di $t=0$

Quindi l'origine è un $\boxed{\text{p.to di sella}}$

(b) Le derivate non nulle sono quelle che corrispondono ai coeff. non nulli in $P_6$. In particolare il coeff. di $x^i y^j$ è $\frac{1}{i!j!} \partial_x^i \partial_y^j f(0,0)$, da cui

$$f_{xyyy}(0,0) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 3! = -1 \qquad f_{xxxyyy}(0,0) = -\frac{1}{6} \cdot 3! 3! = -6$$

$$f_{xyyyyy}(0,0) = -\frac{1}{120} \cdot 1! \, 5! = -1$$

(c) $f(t, \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}t) - t$ $\rightsquigarrow$ questa tende a $\mp\infty$ per $t \to \pm\infty$

Quindi

$$\boxed{\sup = +\infty \qquad \inf = -\infty}$$

(Bonus) Vedi ultima pagina

3. Consideriamo l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \le 3\right\}.$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente al bordo di $V$ nel punto $(1,-1,-1)$.

(b) Calcolare

$$\int_V (x-z)^2 \, dx\, dy\, dz.$$

(a) Il bordo di $V$ è una superficie di livello della funzione $g(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^2$. Ora $\nabla g = (2x, 4y^3, 2z)$ e quindi $\nabla g(1,-1,-1) = (2,-4,-2)$. Quindi il piano tangente passa per $(1,-1,-1)$ ed è $\perp$ a $(1,-2,-1)$.

$$\boxed{x - 2y - z - 4 = 0}$$

(b)

$$\iiint_V (x-z)^2 dx\,dy\,dz = \iiint_V (x^2 - \underbrace{2xz}_{\overset{\shortparallel}{0}} + z^2)\, dx\,dy\,dz$$

per simmetria

per sezioni

$$= \int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} dy \iint_{S_y} (x^2+z^2)\, dx\, dz = \int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} dy \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\sqrt{3-y^4}} \rho^3 d\rho$$

↑ cerchio di raggio $\sqrt{3-y^4}$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} (3-y^4)^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt[4]{3}} (9 - 6y^4 + y^8)\, dy = \boxed{\frac{32}{5}\sqrt[4]{3}\,\pi}$$

↑ funzione pari

4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, y, y - z)$.

(a) Determinare un campo vettoriale $F$ tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare il flusso di $E$ attraverso il triangolo con vertici nei punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, orientato nella direzione uscente rispetto all'origine.

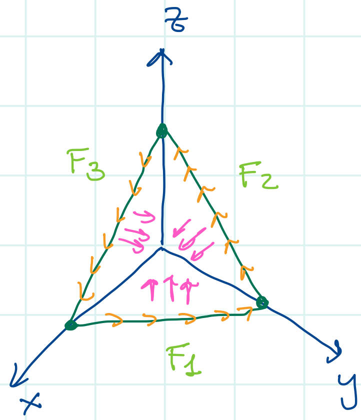
(a) $F = (A, B, C)$ $\quad$ $\operatorname{rot} F = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$

Scelgo $C \equiv 0$ e mi riduco a risolvere

$$\begin{cases} -B_z = y \\ A_z = y \\ B_x - A_y = y - z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} B = -yz + \varphi(x,y) \\ A = yz \end{cases} \Rightarrow \varphi_x - \cancel{z} = y - \cancel{z} \Rightarrow \varphi = xy$$

Una possibilità è $\boxed{F = (yz, y(x-z), 0)}$ [ fare la verifica ! ]

(b) Vedo il triangolo in questione come quarta faccia del tetraedro in figura. Quello richiesto è il flusso uscente dalla faccia in questione, il quale (essendo $\operatorname{div} E = 0$) è uguale al flusso entrante dalle altre 3 facce. Calcoliamo quindi




$$\iint_{F_1} \langle E, (0,0,1) \rangle \, d\sigma = \iint_{F_1} (y - \underset{\overset{\parallel}{0}}{z}) \, dx\, dy = \int_0^1 dy \cdot y(1-y) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{F_2} \langle E, (1,0,0) \rangle \, d\sigma = \iint_{F_2} y \, dy\, dz = \frac{1}{6} \quad \text{(uguale al precedente)}$$

$$\iint_{F_3} \langle E, (0,1,0) \rangle \, d\sigma = \iint_{F_3} y \, dx\, dz = 0$$

Quindi $\boxed{\text{Flusso richiesto} = \frac{1}{3}}$

Alternativa per (b): calcolare la circuitazione del campo $F$ del p.to (a) lungo il bordo del triangolo orientato come in figura.

Si poteva anche usare direttamente la definizione.

(2 bonus) Dalla disuguaglianza

$$|b| - |a| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

deduciamo che

$$x|\sin y| - 1 \leq |f(x,y)| \leq x|\sin y| + 1 \qquad \forall (x,y) \in Q_L$$

e di conseguenza

$$\iint_{Q_L} x|\sin y|\,dx\,dy - L^2 \leq \iint_{Q_L} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{Q_L} x|\sin y|\,dx\,dy - L^2$$

Osserviamo ora che

$$\iint_{Q_L} x|\sin y|\,dx\,dy = \int_0^L x\,dx \int_0^L |\sin y|\,dy \sim \frac{1}{2}L^2 \cdot \frac{2}{\pi}L = \frac{1}{\pi}L^3$$

da cui

$$\boxed{\lim_{L\to+\infty} \frac{1}{R^\alpha} \iint_{Q_L} |f(x,y)|\,dx\,dy = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{\pi} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}}$$

Più precisamente vale la disuguaglianza

$$\frac{2}{\pi}(L-\pi) \leq \int_0^L |\sin y|\,dy \leq \frac{2}{\pi}(L+\pi)$$

Basta infatti scrivere $L$ come $L = k\pi + \ell$, con $\ell \in [0,\pi)$ e $k$ intero e osservare che

$$\int_0^L |\sin y|\,dy \geq \int_0^{k\pi} |\sin y|\,dy = 2\cdot k = \frac{2}{\pi}(L-\ell) \geq \frac{2}{\pi}(L-\pi)$$

$$\int_0^L |\sin y|\,dy \leq \int_0^{(k+1)\pi} |\sin y|\,dy = 2(k+1) = \frac{2}{\pi}(L-\ell)+2 \leq \frac{2}{\pi}(L+\pi)$$

— o — o —