Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 16 Gennaio 2024

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ x + y^2 - z = 1,\ y \in [-1,1]\right\}$$

e la funzione

$$f(x,y,z) = x + z.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y,z)$ in A, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \sin(xy) - x\sin y.$$

(a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.

(b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine minore o uguale a 6 di $f(x,y)$, calcolate nell'origine.

(c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y)$ su tutto il piano.

(d) (Bonus question) Per ogni numero reale $L > 0$ sia Q_L il quadrato $[0,L] \times [0,L]$. Determinare, al variare del parametro reale α, il

$$\lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L^\alpha} \int_{Q_L} |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

3. Consideriamo l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 \leq 3\right\}.$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente al bordo di V nel punto $(1,-1,-1)$.

(b) Calcolare

$$\int_V (x-z)^2\, dx\, dy\, dz.$$

4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, y, y - z)$.

(a) Determinare un campo vettoriale F tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare il flusso di E attraverso il triangolo con vertici nei punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, orientato nella direzione uscente rispetto all'origine.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.