Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 16 Dicembre 2023

1. Consideriamo l'insieme
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \leq x + y\right\}$$
e le funzioni
$$f(x, y) = y + x^2, \qquad g(x, y) = y - x^2.$$
Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in A, precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.

2. Sia S la sfera con centro in $(1, 0, -2)$ e la cui superficie passa per l'origine.
Calcolare
$$\int_S |y|\,dx\,dy\,dz, \qquad \int_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

3. Consideriamo la curva
$$\gamma(t) = (t + t^3, t^2 + t^4) \qquad t \in [0, 1],$$
e sia F l'insieme del piano limitato dal sostegno della curva, dall'asse y e dalla retta $y = 2$.
   (a) Determinare l'area di F.
   (b) Determinare il volume del solido V ottenuto da una rotazione completa della figura F intorno all'asse y.
   (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale
$$\int_V \frac{|z|^\alpha}{y^8}\,dx\,dy\,dz.$$

4. Consideriamo la superficie
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (z + 1)y^2 + z^4 = 18,\ 0 \leq z \leq 2\right\}$$
con l'orientazione che punta approssimativamente vero l'asse z.
   (a) Determinare il versore normale alla superficie nel punto $(3, 2, 1)$, coerente con l'orientazione.
   (b) Scrivere una parametrizzazione del bordo di S coerente con l'orientazione.
   (c) Calcolare il flusso attraverso S del campo vettoriale
$$E = \left(y^2 e^y, x^2 + z^4, y^2 + \sin x\right).$$

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

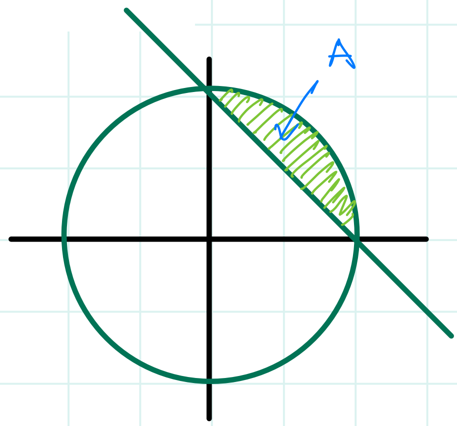
1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \leq x + y\}$$

e le funzioni

$$f(x, y) = y + x^2, \qquad g(x, y) = y - x^2.$$

Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in A, precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.



L'insieme A è compatto, le funzioni sono continue, quindi max/min esistono per Weierstrass in entrambi i casi.

$\boxed{g(x,y)}$ Nell'insieme A valgono le diseg.

$g(x,y) = y - x^2 \leq y \leq 1$ con uguagl. $\Leftrightarrow$ $y=1$ e $x=0$

$g(x,y) = y - x^2 \geq -x^2 \geq -1$ con uguagl. $\Leftrightarrow$ $y=0$ e $x=1$.

Quindi

max $= 1$	p.to di max $= (0,1)$
min $= -1$	p.to di min $= (1,0)$

$\boxed{f(x,y)}$ $\nabla f(x,y) = (2x, 1)$ $\Rightarrow$ non ci sono p.ti staz. o singolari

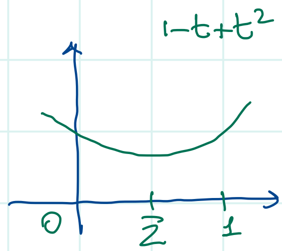
$\Rightarrow$ max e min stanno sul bordo, fatto di due pezzi

$\rightarrow$ pezzo 1: segmento $(t, 1-t)$ con $t \in [0,1]$

$f(t, 1-t) = 1 - t + t^2$

max per $t \in \{0,1\}$ min per $t = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ candidati $(0,1), (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

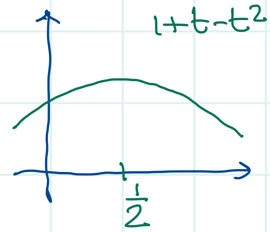


$\rightarrow$ pezzo 2: arco $(\sqrt{1-t^2}, t)$ con $t \in [0,1]$

$f(\sqrt{1-t^2}, t) = t + 1 - t^2$

max per $t = \frac{1}{2}$, min per $t \in \{0,1\}$

$\rightsquigarrow$ candidati $(0,1), (1,0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



$f(0,1) = f(1,0) = 1$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

max $= \frac{5}{4}$	p.to di max $= (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
min $= \frac{3}{4}$	p.to di min $= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Alternativa: moltiplicatori di Lagrange sull'arco di circonferenza.

2. Sia S la sfera con centro in $(1,0,-2)$ e la cui superficie passa per l'origine. Calcolare

$$\int_S |y|\,dx\,dy\,dz, \qquad \int_S (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Equazione della sfera : $\boxed{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=5}$

Cambio di variabili : $x-1=u \quad y=v \quad z+2=w$

$x=u-1 \quad y=v \quad z=w-2$

$\boxed{J=1 \text{ (traslazione)}}$

$$\int_S |y|\,dx\,dy\,dz = \int_{u^2+v^2+w^2\le 5} |v|\,du\,dv\,dw = 2\int_{u^2+v^2+w^2\le 5} w\,du\,dv\,dw$$

simmetrie varie

$$= 2\int_0^{\sqrt5} d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \rho\sin\varphi\ \rho^2\cos\varphi = 4\pi \underbrace{\int_0^{\sqrt5}\rho^3 d\rho}_{\frac14 25} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{\left[\frac12\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac12}$$

sferiche dei geografi

$$\boxed{=\frac{25}{2}\pi}$$

$$\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{u^2+v^2+w^2\le5} (u^2\underbrace{-2u}_{0}+1+v^2+w^2\underbrace{-4w}_{0}+4)\,du\,dv\,dw$$

← simmetrie

$$= 5\cdot\text{volume sfera} + \int_{u^2+v^2+w^2\le5} (u^2+v^2+w^2)\,du\,dv\,dw$$

$$= 5\cdot\frac43\pi\,5\sqrt5 + \int_0^{\sqrt5} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \rho^2\cdot\rho^2\cos\varphi$$

sferiche dei geografi

$$= \frac{100\sqrt5}{3}\pi + \underbrace{\int_0^{\sqrt5}\rho^4 d\rho}_{\frac15 5^2\sqrt5} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi}_{2} = \frac{100\sqrt5}{3}\pi + 20\sqrt5\,\pi$$

$$= \boxed{\frac{160\sqrt5}{3}\pi}$$

— o — o —

3. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t + t^3, t^2 + t^4) \qquad t \in [0, 1],$$

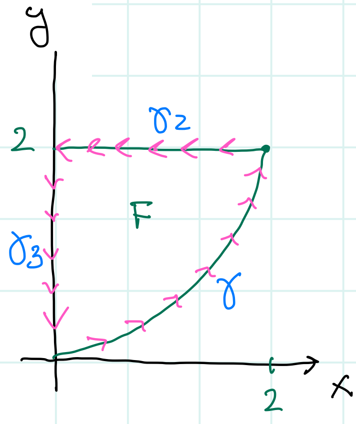
e sia F l'insieme del piano limitato dal sostegno della curva, dall'asse y e dalla retta $y = 2$.

(a) Determinare l'area di F.

(b) Determinare il volume del solido V ottenuto da una rotazione completa della figura F intorno all'asse y.

(c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale

$$\int_V \frac{|z|^\alpha}{y^8}\, dx\, dy\, dz.$$



γ è una curva semplice (entrambe le componenti sono monotone) che va da $(0,0)$ a $(2,2)$, quindi $0 \leq x(t) \leq 2$ e $0 \leq y(t) \leq 2$ per ogni $t \in [0,1]$.

Il bordo di F è costituito da 3 curve

→ γ con il verso giusto

→ $\gamma_2(t) = (t, 2)$ con $t \in [0,2]$ al contrario

→ $\gamma_3(t) = (0, t)$ con $t \in [0,2]$ al contrario

$$\text{Area}(F) = \int_{\partial F} x\,dy = \int_\gamma x\,dy + \underbrace{\int_{\gamma_2} x\,dy}_{=0 \text{ su } \gamma_2} + \underbrace{\int_{\gamma_3} x\,dy}_{=0 \text{ su } \gamma_3}$$

$$= \int_0^1 (t+t^3)(2t+4t^3)\,dt = \int_0^1 (2t^2 + 6t^4 + 4t^6)\,dt = \boxed{\frac{256}{105}}$$

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F \underbrace{x}_{\text{div}\left(\frac{1}{2}x^2, 0\right)}\,dx\,dy = \pi \int_{\partial F} x^2\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (t+t^3)^2(2t+4t^3)\,dt = \boxed{\frac{209}{60}\pi}$$

wolframalpha :)

I contributi di γ_2 e γ_3 si annullano come prima

Alternativa: usare $\text{div}(0, xy)$, ma occhio che il contributo di γ_2 non è più nullo.

(Bonus) Vedi ultima pagina

4. Consideriamo la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (z+1)y^2 + z^4 = 18,\ 0 \le z \le 2\}$$

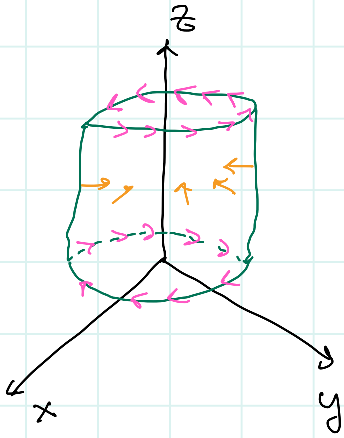
con l'orientazione che punta approssimativamente vero l'asse z.

(a) Determinare il versore normale alla superficie nel punto $(3, 2, 1)$, coerente con l'orientazione.

(b) Scrivere una parametrizzazione del bordo di S coerente con l'orientazione.

(c) Calcolare il flusso attraverso S del campo vettoriale

$$E = \left(y^2 e^y, x^2 + z^4, y^2 + \sin x\right).$$



La superficie S è una specie di cilindro
(le sezioni a z fisso sono ellissi e va restringendosi)

funzione che def. S

(a) $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y(z+1), y^2+4z^3)$

$\nabla g(3,2,1) = (6,8,8)$ quindi $\vec{n}$ è proporzionale a $(3,4,4)$.

Dovendo puntare verso l'asse z cambio i segni (e normalizzo):

$$\boxed{\vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{41}}(3,4,4)}$$

(b) ∂S è costituito da due curve orientate come in figura, visto che l'orientazione di S è "entrante"

$\boxed{z=0}$	$x^2+y^2=18$	$(3\sqrt{2}\cos t, -3\sqrt{2}\sin t)$	$t \in [0, 2\pi]$
$\boxed{z=2}$	$x^2+3y^2=2$	$(\sqrt{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin t)$	$t \in [0, 2\pi]$

(c) Osserviamo che $\operatorname{div} E = 0$, dunque il flusso entrante da S è uguale al flusso uscente dalle due basi

$\boxed{\text{Base } z=0}$

$$\iint_{x^2+y^2\le 18} \langle E, (0,0,-1)\rangle \, dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 18} (-y^2 - \underbrace{\sin x}_{\overset{\shortparallel}{0}})\, dx\,dy$$

per simmetria

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 18} y^2 \, dx\,dy = -\int_0^{3\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\theta\, \rho\, d\theta \quad -\pi \cdot \frac{1}{4}\, 18^2 = -81\pi$$

$\boxed{\text{Base } z=2}$

$$\iint_{x^2+3y^2\le 2} \langle E, (0,0,1)\rangle \, dx\,dy = \iint_{x^2+3y^2\le 2} (y^2 + \underbrace{\sin x}_{\overset{\shortparallel}{0}})\, dx\,dy$$

$u = x,\ v = \sqrt{3}y$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 2} \frac{1}{3} v^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{J} \, du\,dv = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\, \pi\, \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\left(-81 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\pi}$$

(Bonus question) Intanto il problema è solo nell'origine

$\boxed{\text{Brutal mode}}$ Vicino all'origine è come se stessi ruotando $y=x^2$, quindi usando coord. cilindriche $(\rho\cos\theta, y, \rho\sin\theta)$ si ottiene

$$\int_V \frac{|z|^\alpha}{y^8}\,dx\,dy\,dz \sim \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \frac{\rho^\alpha |\sin\theta|^\alpha}{y^8}\cdot\rho$$

$$\sim \int_0^1 dy\,\frac{1}{y^8}\int_0^{\sqrt{y}} \rho^{\alpha+1}\,d\rho \sim \int_0^1 \frac{1}{y^8}\left(\sqrt{y}\right)^{\alpha+2} dy$$

e questo converge $\iff 8-\frac{\alpha}{2}-1<1$, cioè $\iff \frac{\alpha}{2}>6 \iff \boxed{\alpha>12}$

Per giustificare formalmente i passaggi, basta verificare che, in un intorno dell'origine, il sostegno di γ sta nella zona compresa tra le parabole

$$y=\frac{1}{2}x^2 \qquad \text{e} \qquad y=2x^2$$

cioè che per t abbastanza piccoli valgono le disuguaglianze

$$\frac{1}{2}(t+t^3)^2 \le t^2+t^4 \le 2(t+t^3)^2,$$

le quali sono sostanzialmente ovvie.

— o — o —