

# Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 16 Dicembre 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \leq x + y\}$$

e le funzioni

$$f(x, y) = y + x^2, \quad g(x, y) = y - x^2.$$

Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in  $A$ , precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.

2. Sia  $S$  la sfera con centro in  $(1, 0, -2)$  e la cui superficie passa per l'origine.

Calcolare

$$\int_S |y| \, dx \, dy \, dz, \quad \int_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

3. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t + t^3, t^2 + t^4) \quad t \in [0, 1],$$

e sia  $F$  l'insieme del piano limitato dal sostegno della curva, dall'asse  $y$  e dalla retta  $y = 2$ .

- (a) Determinare l'area di  $F$ .
- (b) Determinare il volume del solido  $V$  ottenuto da una rotazione completa della figura  $F$  intorno all'asse  $y$ .
- (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ , la convergenza dell'integrale

$$\int_V \frac{|z|^\alpha}{y^8} \, dx \, dy \, dz.$$

4. Consideriamo la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (z + 1)y^2 + z^4 = 18, 0 \leq z \leq 2\}$$

con l'orientazione che punta approssimativamente verso l'asse  $z$ .

- (a) Determinare il versore normale alla superficie nel punto  $(3, 2, 1)$ , coerente con l'orientazione.
- (b) Scrivere una parametrizzazione del bordo di  $S$  coerente con l'orientazione.
- (c) Calcolare il flusso attraverso  $S$  del campo vettoriale

$$E = (y^2 e^y, x^2 + z^4, y^2 + \sin x).$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.