Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 06 Settembre 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 8,\ xz = 1,\ z \in [0, 2]\right\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $g(x, y, z) = x - y$ in A, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2. Sia $Q = (0, +\infty) \times (0 + \infty)$ il primo quadrante del piano. Consideriamo, per ogni valore del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \frac{xy^\alpha}{x^3 + x^3y^6 + y^3}.$$

   (a) Nel caso $\alpha = 1$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

   (b) Nel caso $\alpha = 7$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

   (c) (Bonus question) Determinare per quali valori di α la funzione ammette massimo in Q.

3. Sia D l'insieme costituito dai punti del piano cartesiano che stanno dentro al cerchio con centro nell'origine e raggio 2, ma fuori dal quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_D x\, dx\, dy, \qquad \int_D y^2\, dx\, dy, \qquad \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy.$$

4. Sia S la superficie parametrizzata da

$$(u\cos\theta, u, u^2\sin^3\theta) \qquad (u, \theta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto $(0, 1, 1)$.

   (b) Determinare il volume del solido racchiuso da S e dal piano $y = 2$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 8,\ xz = 1,\ z \in [0,2]\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $g(x,y,z) = x - y$ in A, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

L'insieme A è chiuso e limitato (dalla prima e terza condizione deduciamo che $|x| \le 2\sqrt{2}$, $|y| \le 2\sqrt{2}$, $0 \le z \le 2$), quindi compatto. Essendo g continua, max / min esistono per Weierstrass.

L'insieme A è "solo bordo" per cui utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange.

$\boxed{\text{1º sistema}}$ $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ Per avere rango ≤ 1 serve $x=0$, il che è incompatibile con $xz=1$

$\boxed{\text{2º sistema}}$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu z \\ -1 = 2\lambda y \\ 0 = \mu x \\ x^2+y^2 = 8 \\ xz = 1 \end{cases}$$

3^a eq $\Rightarrow$ $x=0$ incompatibile con 5^a eq.

$\Rightarrow$ $\mu = 0$

$\downarrow$ 1^a e 2^a eq

$y = -x$

$\downarrow$ 4^a eq.

$x^2 = \pm 2$

$\boxed{(2,-2,\tfrac{1}{2})}$ UNICO CANDIDATO

$(-2,2,-\tfrac{1}{2})$ incompatibile con $z \in [0,2]$

$\boxed{\text{Bordi dei bordi}}$ $z=0 \rightsquigarrow$ nulla perché $xz=1$

$z=2 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow y^2 = 8 - \frac{1}{4} \rightsquigarrow y = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$

$\rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{31}}{2}, 2\right)}$

$g(2,-2,\frac{1}{2}) = \boxed{4}$

$g(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{31}}{2}, 2) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}}$

$g(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{31}}{2}, 2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2} < \frac{1}{2} + 3 < 4$

Conclusione:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Max} &= 4 \\ \text{min} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2} \end{aligned}}$$

2. Sia $Q = (0, +\infty) \times (0 + \infty)$ il primo quadrante del piano. Consideriamo, per ogni valore del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \frac{xy^\alpha}{x^3 + x^3y^6 + y^3}.$$

(a) Nel caso $\alpha = 1$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

(b) Nel caso $\alpha = 7$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$.

(c) (Bonus question) Determinare per quali valori di α la funzione ammette massimo in Q.

(a) Il limite esiste ed è uguale a 0. Infatti

$$0 \le f_1(x,y) \le \frac{xy}{x^3+y^3} = \frac{\cancel{\rho^2}}{\rho^3} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\underbrace{\boxed{\cos^3\theta + \sin^3\theta}}_{\ge m > 0 \text{ per il solito motivo}}} \le \frac{1}{\rho}\frac{1}{m}$$

Quindi $f_1(x,y) \to 0$ per $\rho \to +\infty$ per teorema carabinieri

(b) Il limite non esiste Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} f_7(1,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^7}{1+t^6+t^3} = +\infty$$

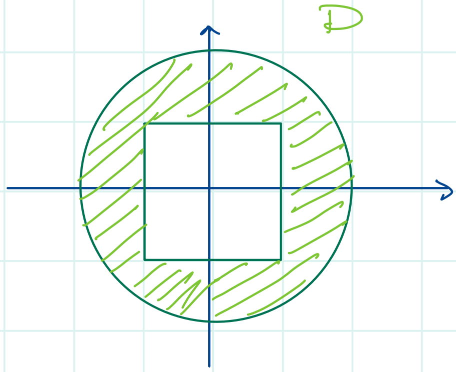
$$\lim_{t \to +\infty} f_7(t,1) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t^3+t^3+1} = 0$$

(c) Bonus question nella pagina finale.

3. Sia D l'insieme costituito dai punti del piano cartesiano che stanno dentro al cerchio con centro nell'origine e raggio 2, ma fuori dal quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_D x\, dx\, dy, \qquad \int_D y^2\, dx\, dy, \qquad \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

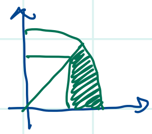


$$\iint_D x\, dx dy = \boxed{0} \quad \text{per simmetria rispetto asse } y$$

$$\iint_D y^2 dx dy = \iint_{\text{cerchio}} y^2 dx dy - \iint_{\square} y^2 dx dy$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho - \int_{-1}^{1} y^2 dy \int_{-1}^{1} dx$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^3 d\rho}_{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta}_{\pi} - 2 \underbrace{\int_{-1}^{1} y^2 dy}_{\frac{2}{3}} = \boxed{4\pi - \frac{4}{3}}$$



$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 8 \left\{ \iint_{\triangle} \cdots - \iint_{\triangle} \cdots \right\}$$

$x \le 1$

$\rho \cos\theta \le 1$

$\rho \le \frac{1}{\cos\theta}$

$$= 8 \left\{ \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \; \frac{1}{\rho} \cdot \rho - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\rho \; \frac{1}{\rho} \cdot \rho \right\}$$

$$8 \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta} d\theta \right\} = \boxed{4\pi - 8 \log(\sqrt{2}+1)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta \underset{t = \sin\theta}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \log(\sqrt{2}+1)$$

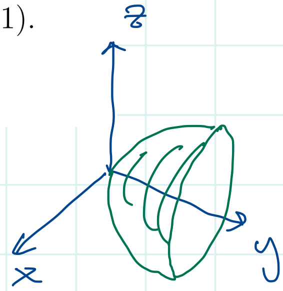
— o — o —

4. Sia S la superficie parametrizzata da

$$(u\cos\theta, u, u^2\sin^3\theta) \qquad (u,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto $(0,1,1)$.

(b) Determinare il volume del solido racchiuso da S e dal piano $y=2$.



$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & 2u\sin^3\theta \\ -u\sin\theta & 0 & 3u^2\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Il punto $(0,1,1)$ corrisponde a $u=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$. In quel caso

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(0,-2,+1)}$$

vettore normale al piano tang.

$$\rightsquigarrow \boxed{2y - z = 1}$$

(piano passante per $(0,1,1)$ e perpendicolare alla direzione $(0,2,-1)$)

(b) Consideriamo il campo $E=(x,0,0)$, e sia V il solido in questione. Allora

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V \operatorname{div} E\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n}\rangle\, d\sigma$$

normale esterna

∂V è fatto da S più il "tappo" per $y=2$ su cui $\langle \vec{E}, \vec{n}\rangle = 0$.

$$\vec{n} = (3u^2\sin^2\theta\cos\theta, \,---,\, ---)$$

queste componenti non mi servono

e ha il verso giusto nel punto $(0,1,1)$ perché ha seconda componente negativa mentre "V si allarga quando y aumenta".

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^2 du \int_0^{2\pi} d\theta\; 3u^3\sin^2\theta\cos^2\theta = \underbrace{\int_0^2 3u^3\,du}_{6} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\,d\theta = 3\int_0^{4\pi}\sin^2 t\,dt \;\; \cdot \;\; = \boxed{3\pi}$$

— o — o —

(2c) $\boxed{\text{Max esiste} \iff \alpha \in (2,4)}$ Ci sono vari casi da considerare

- se $\alpha < 2$, allora $\lim_{t\to 0} f(t,t) = +\infty$
- se $\alpha > 4$, allora $\lim_{t\to 0} f(t, \frac{1}{t}) = +\infty$
- Se $\alpha = 2$, allora

$$\frac{xy^2}{x^3+x^3y^6+y^3} < \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3} \le \max\left\{\frac{m^2}{1+m^3} : m>0\right\} = L_1 \in \mathbb{R}$$

Inoltre, detto m_0 il p.to di max, $\lim_{t\to 0} f(t, m_0 t) = L_1$

quindi L_1 è il sup, ma non il max

- Se $\alpha = 4$, allora

$$\frac{xy^4}{x^3+x^3y^6+y^3} < \frac{xy^4}{x^3y^6+y^3} = \frac{xy}{1+x^3y^3} \le \max\left\{\frac{\lambda}{1+\lambda^3} : \lambda>0\right\} = L_2 \in \mathbb{R}$$

Inoltre, detto λ_0 il p.to di max, $\lim_{t\to 0} f(t, \frac{\lambda_0}{t}) = L_2$, da cui si conclude come sopra

- Se $\alpha \in (2,4)$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to +\infty} f_\alpha(x,y) = 0$$

da cui l'esistenza del massimo segue per Weierstrass generalizzato.

L'esistenza del limite per $(x,y)\to(0,0)$ si dimostra in modo standard con le coordinate polari.

Per il limite a $+\infty$ occorre distinguere 3 zone

$y \le 1$	$x \le 1$	$y \ge 1$ e $x \ge 1$
$f_\alpha \le \frac{1}{x^2}$ e $x \to +\infty$ in questa zona	$f_\alpha \le \underbrace{\boxed{\frac{xy}{1+(xy)^3}}}_{\le L_2} \frac{1}{y^{4-\alpha}}$ e $y \to +\infty$ in questa zona	$f_\alpha \le \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^{6-\alpha}}$ e almeno una delle due variabili va a $+\infty$ in questa zona

— o — o —