

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 06 Settembre 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 8, xz = 1, z \in [0, 2]\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $g(x, y, z) = x - y$ in A , precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2. Sia $Q = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ il primo quadrante del piano. Consideriamo, per ogni valore del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \frac{xy^\alpha}{x^3 + x^3y^6 + y^3}.$$

- (a) Nel caso $\alpha = 1$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.
(b) Nel caso $\alpha = 7$, determinare se $f_\alpha(x, y)$ ammette limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.
(c) (Bonus question) Determinare per quali valori di α la funzione ammette massimo in Q .
3. Sia D l'insieme costituito dai punti del piano cartesiano che stanno dentro al cerchio con centro nell'origine e raggio 2, ma fuori dal quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_D x \, dx \, dy, \quad \int_D y^2 \, dx \, dy, \quad \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy.$$

4. Sia S la superficie parametrizzata da

$$(u \cos \theta, u, u^2 \sin^3 \theta) \quad (u, \theta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

- (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto $(0, 1, 1)$.
(b) Determinare il volume del solido racchiuso da S e dal piano $y = 2$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.