

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 10 Giugno 2023

1. Consideriamo nello spazio la retta r che passa per il punto $(0, 1, 1)$ ed il punto $(a, 2, 3)$.

Determinare per quali valori del parametro reale a la retta r

- (a) interseca il piano xy (cioè il piano che contiene l'asse x e l'asse y),
- (b) è parallela al piano $3x + y + 4z = 7$,
- (c) forma con il piano di equazione $x - z = 0$ un angolo θ tale che

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{27}{28}}.$$

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A

- (a) è diagonalizzabile sui reali,
 - (b) è diagonalizzabile sui complessi,
 - (c) rappresenta un'applicazione lineare non iniettiva (in tal caso determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale).
3. (a) Determinare una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + 8yw < 0.$$

- (b) Determinare per quali valori del parametro reale a esiste una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + ayw < 0.$$

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 1$.
- (b) Determinare l'immagine e la controimmagine dell'asse y rispetto a tale trasformazione.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.