

## Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 10 Giugno 2023

1. Consideriamo nello spazio la retta  $r$  che passa per il punto  $(0, 1, 1)$  ed il punto  $(a, 2, 3)$ .

Determinare per quali valori del parametro reale  $a$  la retta  $r$

- (a) interseca il piano  $xy$  (cioè il piano che contiene l'asse  $x$  e l'asse  $y$ ),
- (b) è parallela al piano  $3x + y + 4z = 7$ ,
- (c) forma con il piano di equazione  $x - z = 0$  un angolo  $\theta$  tale che

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{27}{28}}.$$

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale  $a$  la matrice  $A$

- (a) è diagonalizzabile sui reali,
- (b) è diagonalizzabile sui complessi,
- (c) rappresenta un'applicazione lineare non iniettiva (in tal caso determinare una matrice  $M$  invertibile tale che  $M^{-1}AM$  sia una matrice diagonale).

3. (a) Determinare una quaterna  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + 8yw < 0.$$

- (b) Determinare per quali valori del parametro reale  $a$  esiste una quaterna  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  tale che

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + ayw < 0.$$

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto alla retta  $y = 2x + 1$ .
- (b) Determinare l'immagine e la controimmagine dell'asse  $y$  rispetto a tale trasformazione.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.