Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 10 Maggio 2023

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = x^2 + |y|^\alpha - xy^2.$$
   (a) Nel caso $\alpha = 3$, determinare estremo inferiore e superiore della funzione su tutto $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

   (b) Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ esiste il
$$\min \{f(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

2. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x,y,z) = |x - y + z^2|$$
nell'insieme
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\},$$
precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare quanti sono i punti di minimo e massimo.

3. Consideriamo il solido
$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq z\right\}.$$
Determinare il volume e l'area della superficie di V.

4. Consideriamo la curva
$$\gamma(t) = (2t - t^2, t + t^2) \qquad t \in [-1, 2].$$
   (a) Stabilire se si tratta di una curva semplice.

   (b) Fare un disegno approssimativo del sostegno di γ, specificando in particolare le sue intersezioni con gli assi cartesiani.

   (c) Detta D la regione di $\mathbb{R}^2$ limitata dal sostegno di γ e dal segmento che congiunge gli estremi, calcolare
$$\int_D x \, dx \, dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 + |y|^\alpha - xy^2.$$

(a) Nel caso $\alpha = 3$, determinare estremo inferiore e superiore della funzione su tutto $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ esiste il

$$\min \{f(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(a) $f(x,y) = x^2 + |y|^3 - xy^2$

$\lim_{t \to +\infty} f(t,0) = \lim_{t \to +\infty} t^2 = +\infty \Rightarrow \boxed{\sup = +\infty}$ (max non esiste)

$\lim_{t \to +\infty} f(2t,t) = \lim_{t \to +\infty} 4t^2 + t^3 - 2t^3 = -\infty \Rightarrow \boxed{\inf = -\infty}$ (min. non esiste)

(b) Il minimo esiste $\boxed{\text{se e solo se } \alpha \geq 4}$

→ Per $\alpha < 4$ si ha che $\lim_{t \to +\infty} f(t^\alpha, t^2) = \lim_{t \to +\infty} 2t^{2\alpha} - t^{\alpha+4} = -\infty$

perché $\alpha + 4 > 2\alpha$

quindi $\inf = -\infty$ e min non esiste.

→ Per $\alpha > 4$ si ha che $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, dunque

l'esistenza del minimo segue dal teorema di Weierstrass generalizzato.

Per mostrare l'esistenza del limite basta porre $x = u^\alpha$, $y = v^2$ per ridursi a

$$u^{2\alpha} + v^{2\alpha} - u^\alpha v^4 = \rho^{2\alpha}(\cos^{2\alpha}\theta + \sin^{2\alpha}\theta) - \rho^{\alpha+4}\cos^\alpha\theta \sin^4\theta$$

$$\geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{strett.} > 0}}{m}\,\rho^{2\alpha} - \rho^{\alpha+4} \longrightarrow +\infty$$

perché $\alpha + 4 < 2\alpha$

→ Per $\alpha = 4$ basta osservare che

$$x^2 + y^4 - xy^2 \geq x^2 + y^4 - 2xy^2 = (x - y^2)^2 \geq 0$$

e $f(0,0) = 0$, per cui 0 è il minimo.

— o — o —

2. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione

$$f(x,y,z) = |x - y + z^2|$$

nell'insieme

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\},$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare quanti sono i punti di minimo e massimo.

La sfera è compatta e la funzione è continua, quindi max / min esistono per il teo. di Weierstrass.

Studiamo max / min di $g(x,y) = x-y+z^2$.

$\nabla g(x,y) = (1,-1,2z)$, quindi non ci sono p.ti stazionari o singolari interni.

Studiamo sul bordo con i moltiplicatori di Lagrange.

$\boxed{1° \text{ sistema}}$ $x=y=z=0$ $x^2+y^2+z^2=1$ ⇝ NO soluzioni

$\boxed{2° \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$z = \lambda z$

$\lambda = 1 \to x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \to z^2 = \frac{1}{2}$ $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\to \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$z = 0 \to x^2+y^2=1$, $y=-x$ $\to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\sqrt{2}$

Passando a $f(x,y,z)$:

→ $\boxed{\max = \frac{3}{2}}$ $\boxed{\text{p.to di max: } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

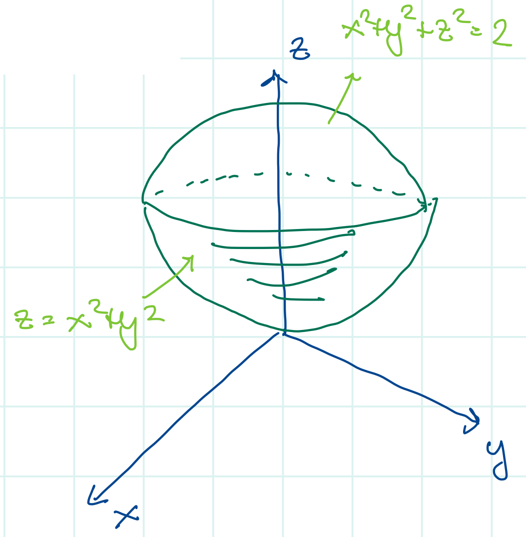
→ $\boxed{\min = 0}$ $\boxed{\text{p.ti di minimo tutti quelli con } x-y+z^2=0 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \le 1}$

sono tutti i p.ti del grafico di $x = y - z^2$ che stanno nella sfera

3. Consideriamo il solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2 \le z\right\}.$$

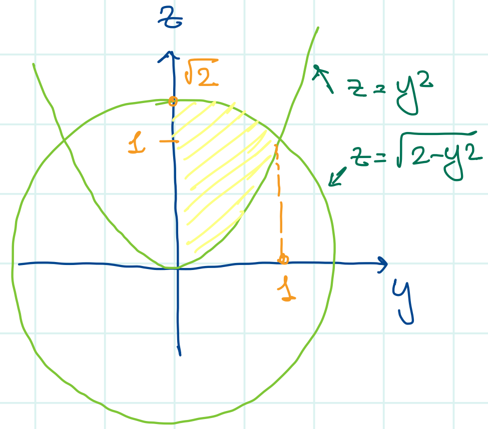
Determinare il volume e l'area della superficie di V.



Procediamo per sezioni

→ per $z \in [0,1]$ la sezione è un cerchio di raggio $\sqrt{z}$

→ per $z \in [1,\sqrt{2}]$ la sezione è un cerchio di raggio $\sqrt{2-z^2}$



$$\boxed{\text{Vol}} = \int_0^1 \pi z \, dz + \int_1^{\sqrt{2}} \pi(2-z^2)\, dz$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} + \pi\left[2z - \frac{1}{3}z^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \pi\left\{\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2 + \frac{1}{3}\right\}$$

$$\boxed{= \pi\left\{-\frac{7}{6} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right\}}$$

[Alternativa: integrare per colonne]

Parametrizziamo le 2 curve che ruotando descrivono la superficie

$(y(t), z(t)) = (t, t^2) \qquad t \in [0,1]$

$(y(t), z(t)) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \qquad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$\boxed{\text{Area}} = 2\pi \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt + 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\, dt$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + 4\pi\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) + 4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{6} + 4 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{= \pi\left(\frac{23}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)}$$

4. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (2t - t^2, t + t^2) \qquad t \in [-1, 2].$$

(a) Stabilire se si tratta di una curva semplice.

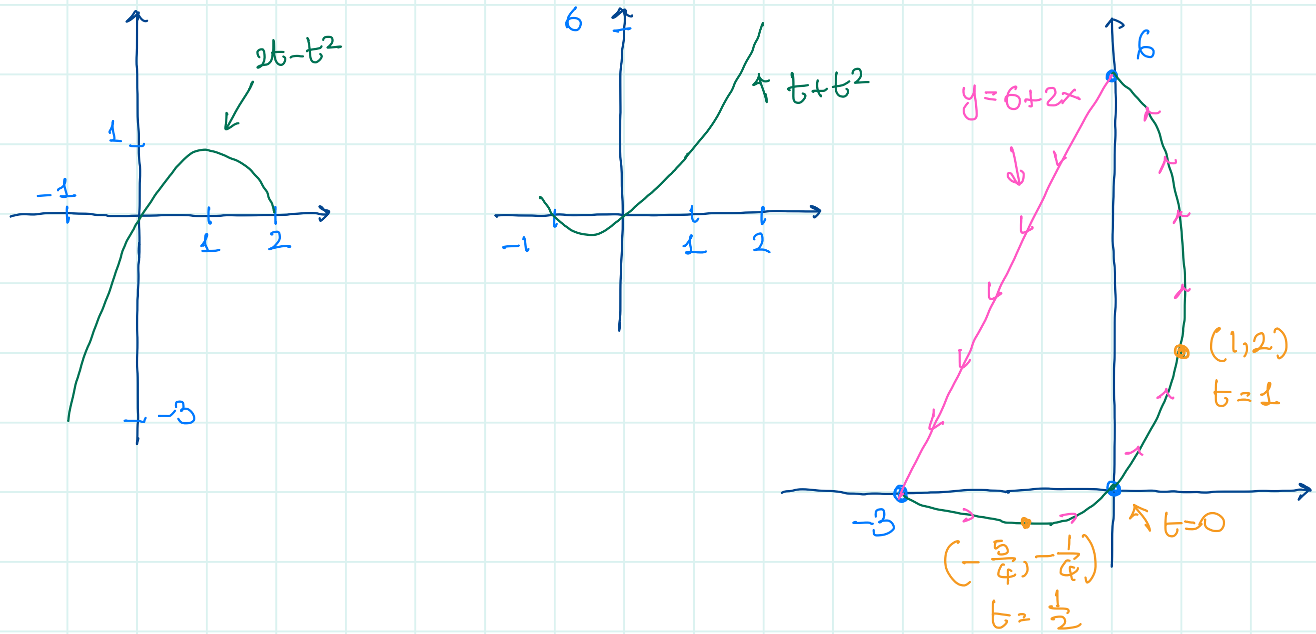
(b) Fare un disegno approssimativo del sostegno di γ, specificando in particolare le sue intersezioni con gli assi cartesiani.

(c) Detta D la regione di $\mathbb{R}^2$ limitata dal sostegno di γ e dal segmento che congiunge gli estremi, calcolare

$$\int_D x\, dx\, dy.$$

(a) $\boxed{\text{SI}}$ Basta osservare che $x(t) + y(t) = 3t$ è monotona

(b)



(c) Verifichiamo che il segmento sta sopra la curva

$$6 + 4t - 2t^2 \le t + t^2 \iff 3t^2 - 3t - 6 \ge 0 \iff t^2 - t - 2 \ge 0 \iff (t-2)(t+1) \ge 0$$
$$\iff t \in [-1, 2]$$

Ora applichiamo il teorema della divergenza

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{\partial D} \frac{x^2}{2}\,dy \qquad \vec{E} = \left(\frac{x^2}{2}, 0\right)$$

Il segmento, percorso nel verso giusto, è

$$(-t, 6-2t) \qquad \text{con } t \in [0,3]$$

quindi

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}(2t-t^2)^2(1+2t)\,dt + \int_0^3 \frac{1}{2} t^2 (-2)\,dt = \boxed{-\frac{81}{10}}$$

courtesy wolfram alpha

[Alternativa: usare il campo $\vec{E} = (0, xy)$]