

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 10 Maggio 2023

1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 + |y|^\alpha - xy^2.$$

- (a) Nel caso $\alpha = 3$, determinare estremo inferiore e superiore della funzione su tutto \mathbb{R}^2 precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.
- (b) Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ esiste il

$$\min \{f(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

2. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione

$$f(x, y, z) = |x - y + z^2|$$

nell'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare quanti sono i punti di minimo e massimo.

3. Consideriamo il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Determinare il volume e l'area della superficie di V .

4. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (2t - t^2, t + t^2) \quad t \in [-1, 2].$$

- (a) Stabilire se si tratta di una curva semplice.
- (b) Fare un disegno approssimativo del sostegno di γ , specificando in particolare le sue intersezioni con gli assi cartesiani.
- (c) Detta D la regione di \mathbb{R}^2 limitata dal sostegno di γ e dal segmento che congiunge gli estremi, calcolare

$$\int_D x \, dx \, dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.