Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 18 Febbraio 2023

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (1, 0, 1), \qquad C = (2, 1, 0), \qquad D = (-1, 1, 1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABD.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta AB ed è perpendicolare al piano passante per B, C, D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ 3x + y - 2z &= b, \\ x + ay + 6z &= 4. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto) del sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

   (c) Determinare una matrice M tale che M^tBM sia l'identità.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (1, 0, 1), \qquad C = (2, 1, 0), \qquad D = (-1, 1, 1).$$

(a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

(b) Determinare l'area del triangolo ABD.

(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta AB ed è perpendicolare al piano passante per B, C, D.

(a) Piano per B,C,D: $(1,0,1)+t(1,1,-1)+s(-2,1,0)$

In cartesiana

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix} \rightsquigarrow (1,2,3) \rightsquigarrow \boxed{x+2y+3z=4}$$

Verifica che passa per B, C, D

retta AB: $(1,2,3)+t(0,1,1)$

Sia θ l'angolo richiesto. Allora $\underbrace{\cos(90°-\theta)}_{\sin\theta} = \dfrac{\langle (1,2,3),(0,1,1)\rangle}{\sqrt{14}\,\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{28}}$

da cui $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{28}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}}$

(b) $B-A = (0,-2,-2)$

$D-A = (-2,-1,-2)$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{matrix} \rightsquigarrow \boxed{(2,4,-4)}$$

verifica che è $\perp$ ad entrambi

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|(2,4,-4)\| = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \boxed{3}$$

(c) In parametrica $(1,2,3)+t(0,1,1)+s(1,2,3)$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \rightsquigarrow (1,1,-1) \rightsquigarrow \boxed{x+y-z=0}$$

Verifica che
- contiene A e B
- $\perp$ al piano per B, C, D

—o—o—

Alternative per punto (b): → Area = $\frac{1}{2}$ base · altezza

base ↑ lato; altezza ↑ distanza 3° vertice dal lato

→ Area = $\frac{1}{2}$ lato · lato · sin (angolo compreso)

—o—o—

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ 3x + y - 2z &= b, \\ x + ay + 6z &= 4. \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & b \\ 1 & a & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Det matrice coeff. $= 6a - 2 - 18 + 2a^2$
$= 2(a^2 + 3a - 10)$
$= 2(a+5)(a-2)$

- Se $a \neq 2$ e $a \neq -5$, allora il sistema ha sol. unica, qualunque sia b.
- Se $a = 2$ il sistema diventa

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & b \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$-8 + 6 + 4 - 6b = 0 \rightsquigarrow 6b = 2 \rightsquigarrow b = \frac{1}{3}$

$\to$ Se $b \neq \frac{1}{3}$ i ranghi sono diversi $\Rightarrow$ NO SOL.

$\to$ Se $b = \frac{1}{3}$ risolviamo esplicitamente

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y + 6z = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + 12z = 7 \end{cases}$$

$z = t$, $y = \frac{7}{3} - 4z = \frac{7}{3} - 4t$, $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{7}{6} + 2t = -\frac{2}{3} + 2t$

$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3} + 2t, \frac{7}{3} - 4t, t\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0\right) + t(2, -4, 1)$

- Se $a = -5$ il sistema diventa

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} -5 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & b \\ 1 & -5 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$-8 + 6 - 10 - 6b = 0 \rightsquigarrow 6b = -12 \rightsquigarrow b = -2$

$\to$ se $b \neq -2$ i ranghi sono diversi $\Rightarrow$ NO SOL.

$\to$ se $b = -2$ risolviamo esplicitamente

$$\begin{cases} -5x + y = 1 \\ x - 5y + 6z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x + y = 1 \\ -24y + 30z = 21 \rightsquigarrow -8y + 10z = 7 \end{cases}$$

$z = t$, $y = -\frac{7}{8} + \frac{5}{4}z = -\frac{7}{8} + \frac{5}{4}t$, $x = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}y = -\frac{1}{5} - \frac{7}{40} + \frac{1}{4}t$
$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}t$

$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4}t, -\frac{7}{8} + \frac{5}{4}t, t\right) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}, 0\right) + t(1, 5, 4)$

(a) Nessuna soluzione se $\boxed{a = 2 \text{ e } b \neq \frac{1}{3}}$, oppure $\boxed{a = -5 \text{ e } b \neq -2}$

(b) Infinite sol. in 2 casi

$a = 2$ e $b = \frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0\right) + t(2, -4, 1)$ ← verifica

$a = -5$ e $b = -2$ $\rightsquigarrow \left(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}, 0\right) + t(1, 5, 4)$ ← verifica

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Per il teorema spettrale la matrice è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale. Basta quindi calcolare autovalori e autovettori.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= -\lambda(2-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right] \\ &= -\lambda(2-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-2) \\ &= -\lambda(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) \\ &= -\lambda(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono $\lambda = 0, 1, 2, 4$. Vediamo gli autovettori

$\boxed{\lambda=0}$ A occhio $(0,1,0,0)$

$\boxed{\lambda=2}$ A occhio $(0,0,1,0)$

$\boxed{\lambda=1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \ker = \text{Span}(\sqrt{2}, 0, 0, -1)$

$\boxed{\lambda=4}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \ker = \text{Span}(1, 0, 0, \sqrt{2})$

Dividendo per le norme

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Matrice ortogonale

$$\underbrace{M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Verifica da fare (osservando che $M^{-1} = M^t$)

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

(b) Determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto) del sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

(c) Determinare una matrice M tale che $M^t B M$ sia l'identità.

(a) Sylvester 1-2-3 : Det 1x1 = 3

Det 2x2 = 8

Det 3x3 = 27 − 3 − 12 = 12 $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{segnatura } + + +}$

$+ + + +$

P P P

(b) $\text{Sottospazio} = \text{Span}((\underset{\uparrow}{\overset{v_1}{2,-1,0}}), (\underset{\uparrow}{\overset{v_2}{3,0,-1}}))$.

Ora ortogonalizziamo con GS

$$v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = (3,0,-1) - \frac{17}{11}(2,-1,0) = \left(-\frac{1}{11}, \frac{17}{11}, -1\right)$$

$$\boxed{\text{Sottospazio} = \text{Span}((2,-1,0),(-1,17,-11))}$$

← verifica che stanno nel sottospazio e sono B-ortogonali

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad (2,-1,0)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 11; \quad (3,0,-1)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 17$$

(c) Applichiamo GS alla base canonica

$$v_1 = (1,0,0)$$

$$v_2 = (0,1,0) - \frac{\langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle_B}{\langle (1,0,0),(1,0,0) \rangle_B}(1,0,0) = (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,0,0) = \left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right)$$

$\rightsquigarrow$ prendiamo $(-1,3,0)$

$$v_3 = (0,0,1) - \frac{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle_B}}{\langle (1,0,0),(1,0,0) \rangle_B}(1,0,0) - \frac{\langle (-1,3,0),(0,0,1) \rangle_B}{\langle (-1,3,0),(-1,3,0) \rangle_B}(-1,3,0)$$

$$= (0,0,1) - \frac{6}{24}(-1,3,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 1\right)$$ $\rightsquigarrow$ prendiamo $(1,-3,4)$

Ora basta normalizzare

$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 3$

$\langle v_2, v_2 \rangle_B = 24$

$\langle v_3, v_3 \rangle_B = 24$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{24}} & -\frac{3}{\sqrt{24}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{24}} \end{pmatrix}}$$

← verifica che $M^t B M = Id$