Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 18 Febbraio 2023

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (1, 0, 1), \qquad C = (2, 1, 0), \qquad D = (-1, 1, 1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABD.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta AB ed è perpendicolare al piano passante per B, C, D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ 3x + y - 2z &= b, \\ x + ay + 6z &= 4. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto) del sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

   (c) Determinare una matrice M tale che M^tBM sia l'identità.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.