Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 4 Febbraio 2023

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (-1, 0, 1), \qquad C = (0, 0, 2), \qquad D = (1, -1, 0).$$

   (a) Determinare il volume del tetraedro che ha i quattro punti come vertici.

   (b) Determinare la distanza tra la retta AB e la retta CD.

   (c) Determinare il simmetrico del punto A rispetto al piano passante per B, C, D.

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$p(x) \mapsto p(x+1) - p(x-1).$$

   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

   (b) Determinare gli autovalori di f, con le relative molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare la forma canonica di f, e una base in cui f assume tale forma canonica.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xz.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

   (b) Nel caso particolare $a = -1$, determinare (esibendone esplicitamente una base) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti punti

$$A = (1,2,3), \qquad B = (-1,0,1), \qquad C = (0,0,2), \qquad D = (1,-1,0).$$

(a) Determinare il volume del tetraedro che ha i quattro punti come vertici.

(b) Determinare la distanza tra la retta AB e la retta CD.

(c) Determinare il simmetrico del punto A rispetto al piano passante per B, C, D.

(a) $B-A = (-2,-2,-2) \qquad C-A = (-1,-2,-1) \qquad D-A = (0,-3,-3)$

$$Vol = \frac{1}{6}\left|\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}(12+6-6-6) = \boxed{1}$$

(b) $D-C = (1,-1,-2)$

Piano che contiene retta AB e parallelo a retta CD:

$$(1,2,3) + t(1,1,1) + s(1,-1,-2)$$

In cartesiana

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix} \rightsquigarrow (-1,3,-2) \rightsquigarrow -x+3y-2z=-1 \rightsquigarrow \boxed{-x+3y-2z+1=0}$$

$$\operatorname{dist}(\text{retta } AB, \text{retta } CD) = \operatorname{dist}(C, \text{piano}) = \boxed{\frac{3}{\sqrt{14}}}$$

← Verifica che $= \operatorname{dist}(D, \text{piano})$

(c) $B-C = (-1,0,-1) \qquad D-C = (1,-1,-2)$

Piano per B, C, D: $(0,0,2) + t(1,0,1) + s(1,-1,-2)$

In cartesiana:

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix} \rightsquigarrow (1,3,-1) \rightsquigarrow \boxed{x+3y-z=-2}$$

↑ Verifica che passa per B, C, D

Retta per A e $\perp$ al piano: $(1,2,3) + t(1,3,-1) = (1+t, 2+3t, 3-t)$

Intersezione retta / piano (= proiezione di A sul piano)

$$1+t+6+9t-3+t = -2 \rightsquigarrow 11t = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{6}{11}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{39}{11}\right)} = H$$

← Verifica che sta nel piano e $A-H \perp$ piano

Simmetrico di A rispetto al piano $= A + 2(H-A) = 2H - A$

$$= \left(\frac{10}{11}, \frac{8}{11}, \frac{78}{11}\right) - (1,2,3) = \boxed{\left(-\frac{1}{11}, \frac{-14}{11}, \frac{45}{11}\right)}$$

← Verifica che H è il p.to medio tra questo e A

— o — o —

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$p(x) \mapsto p(x+1) - p(x-1).$$

(a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare gli autovalori di f, con le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare la forma canonica di f, e una base in cui f assume tale forma canonica.

Matrice di f rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$

$1 \to 0$

$x \to x+1-(x-1) = 2$

$x^2 \to (x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2+2x+1-x^2+2x-1 = 4x$

$x^3 \to (x+1)^3-(x-1)^3 = \cancel{x^3}+3x^2+\cancel{3x}+1-\cancel{x^3}+3x^2-\cancel{3x}+1 = 6x^2+2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Il rango della matrice è 3, quindi dim ker = 1. Si vede che

$\boxed{\ker(f) = \text{Span}(1)}$ $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Span}(1, x, x^2)}$

(b) La matrice è triangolare con 0 sulla diagonale.

L'unico autovalore è $\boxed{\lambda = 0}$ con $\boxed{m_a(0) = 4}$ e $\boxed{m_g(0) = 1}$

(c) La forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la base posso prendere

$\to v_1 = 1$

$\to v_2$ t.c. $f(v_2) = 1$, ad esempio $v_2 = \frac{x}{2}$

$\to v_3$ t.c. $f(v_3) = \frac{x}{2}$, ad esempio $v_3 = \frac{x^2}{8}$

$\to v_4$ t.c. $f(v_4) = \frac{x^2}{8}$, ad esempio

$v_4 = \frac{x^3}{48} - \frac{x}{48}$

Una possibile base è $\boxed{\left\{ 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2}{8}, \frac{x^3-x}{48} \right\}}$ ← Verifica!

— o — o —

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Rango $(A) = 1$, quindi $\dim(\ker(A)) = 3$, quindi $\lambda = 0$ è autovalore di A con $m_g(0) = m_a(0) = 3$ in quanto il rimanente autovalore è $\lambda = 7$ (per via della traccia).

Quindi gli autovalori sono $0, 0, 0, 7$.

Vediamo gli autospazi.

$\boxed{\lambda = 0}$ Si vede a occhio che l'autospazio è

$\mathrm{Span}((0,1,0,0), (1,0,-1,0), (3,0,0,-2))$

$\boxed{\lambda = 7}$ Si vede a occhio che l'autospazio è $\mathrm{Span}((1,1,1,1))$

Pertanto la matrice di passaggio è

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Verifica che $M^{-1}AM = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ anche nella forma equivalente

$AM = MD$

— o — o —

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xz.$$

(a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

(b) Nel caso particolare $a = -1$, determinare (esibendone esplicitamente una base) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

Completiamo i quadrati:

$$x^2 + 4xz + 3z^2 + ay^2 = x^2 + 4xz + 4z^2 - z^2 + ay^2 = (x+2z)^2 - z^2 + ay^2$$

(a) Dal completamento dei quadrati si deduce che la segnatura è

$+ + -$	se $a > 0$
$+ - 0$	se $a = 0$
$+ - -$	se $a < 0$

(b) Nel caso $a = -1$ la forma è $(x+2z)^2 - z^2 - y^2$.

La max dim. di un s.sp. su cui è def. neg. è 2.

Un possibile sottospazio è quello di equazione $x + 2z = 0$, che si può scrivere come

$$\boxed{\text{Span}((2, 0, -1), (0, 1, 0))}$$

— o — o —

Alternativa per (a): si possono anche trovare gli autovalori della matrice, che risultano uno positivo, uno negativo, uno uguale ad a.

Seconda alternativa per (a): Sylvester, meglio se del tipo 1–3–2. Occhio però che per $a = 0$ formalmente non è applicabile, quindi bisogna dire qualcosa d'altro.

— o — o —