Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 4 Febbraio 2023

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (-1, 0, 1), \qquad C = (0, 0, 2), \qquad D = (1, -1, 0).$$

   (a) Determinare il volume del tetraedro che ha i quattro punti come vertici.

   (b) Determinare la distanza tra la retta AB e la retta CD.

   (c) Determinare il simmetrico del punto A rispetto al piano passante per B, C, D.

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$p(x) \mapsto p(x + 1) - p(x - 1).$$

   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

   (b) Determinare gli autovalori di f, con le relative molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare la forma canonica di f, e una base in cui f assume tale forma canonica.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xz.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

   (b) Nel caso particolare $a = -1$, determinare (esibendone esplicitamente una base) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.