Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 17 Gennaio 2023

1. Consideriamo l'insieme
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 82\right\}$$
e le funzioni
$$f(x,y) = 9y + x^2, \qquad\qquad g(x,y) = 2y - 4x^3.$$
Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in A, precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.

2. Sia S la sfera con centro nell'origine di $\mathbb{R}^3$ e raggio 2.
Calcolare
$$\int_S |y|\,dx\,dy\,dz, \qquad\qquad \int_S |y+z|\,dx\,dy\,dz.$$

3. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = \arctan(xy + y^6) - \sin(x^2 + y^4).$$
   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.
   (b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine 8 di $f(x,y)$, calcolate nell'origine.
   (c) Determinare se l'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2\}$ è limitato oppure no.
   (d) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale λ, il
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \min\left\{f(x,y) : x^4 + y^2 \le \varepsilon\right\}.$$

4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, z^3, x^2)$, e la superficie
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 9,\ 0 \le z \le 2\right\}.$$
   (a) Determinare un campo vettoriale F tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calcolare il flusso di E attraverso S, orientata nella direzione che si allontana dall'asse z.
   (c) Calcolare il flusso del rotore di E attraverso S, con la stessa orientazione del punto precedente.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 82\}$$

e le funzioni

$$f(x,y) = 9y + x^2, \qquad\qquad g(x,y) = 2y - 4x^3.$$

Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in A, precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.

$\boxed{\text{Parti comuni}}$ → L'insieme è compatto, le funzioni sono continue, quindi max e min esistono

→ L'insieme è solo bordo

→ Il primo sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 & \rightsquigarrow x = 0 \\ 2y = 0 & \rightsquigarrow y = 0 \\ x^4 + y^2 = 82 & \end{cases} \quad \text{incompatibile}$$

quindi non ha soluzioni.

I candidati emergono quindi dal secondo sistema, diverso nei due casi.

$\boxed{f(x,y) = 9y + x^2}$

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 9 = 2\lambda y \\ x^4 + y^2 = 82 \end{cases}$$

Necessariamente $\lambda y \neq 0$ e quindi dividendo $\frac{2x}{9} = \frac{4\lambda x^3}{2\lambda y} \rightsquigarrow 9x^3 = xy$ $\rightsquigarrow x = 0$, $\rightsquigarrow y = 9x^2$

Se $x = 0$, allora $y = \pm\sqrt{82}$ $\rightsquigarrow (0, \pm\sqrt{82})$

Se $y = 9x^2$, allora $x^4 + 81x^4 = 82 \rightsquigarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow y = 9 \rightsquigarrow (\pm 1, 9)$

$f\underbrace{(\pm 1, 9)}_{\text{p.ti Max}} = \underbrace{\boxed{82}}_{\text{Max}}$ $\qquad f(0, \sqrt{82}) = 9\sqrt{82} < 82$ $\qquad f\underbrace{(0, -\sqrt{82})}_{\text{p.to min}} = \underbrace{\boxed{-9\sqrt{82}}}_{\text{min}}$

$\boxed{f(x,y) = 2y - 4x^3}$

$$\begin{cases} -12x^2 = 4\lambda x^3 \\ 2 = 2\lambda y \\ x^4 + y^2 = 82 \end{cases}$$

Dividendo come sopra $\rightsquigarrow -6x^2 = \frac{2x^3}{y}$ $\rightsquigarrow -6x^2 y = 2x^3 \rightsquigarrow x^2(x + 3y) = 0$

Se $x = 0$, allora $y = \pm\sqrt{82}$ $\rightsquigarrow (0, \pm\sqrt{82})$

Se $x = -3y$, allora $81y^4 + y^2 = 82 \rightsquigarrow y^2 = 1 \rightsquigarrow y = \pm 1 \rightsquigarrow (-3, 1)$ e $(3, -1)$

$f(0, \pm\sqrt{82}) = \pm 2\sqrt{82}$

p.to min $\qquad$ Min

$f(3, -1) = -2 - 4 \cdot 27 = \boxed{-110} < -2\sqrt{82}$

$f\underbrace{(-3, +1)}_{\text{p.to Max}} = +2 + 4 \cdot 27 = \underbrace{\boxed{110}}_{\text{Max}} > 2\sqrt{82}$

2. Sia S la sfera con centro nell'origine di $\mathbb{R}^3$ e raggio 2.

Calcolare
$$\int_S |y|\, dx\, dy\, dz, \qquad \int_S |y+z|\, dx\, dy\, dz.$$

$$\int_S |y|\, dx\,dy\,dz \underset{\text{simmetria}}{=} \int_S |z|\, dx\,dy\,dz \underset{\text{simmetria}}{=} 2\int_{\substack{S\\ z\geq 0}} z\, dx\,dy\,dz$$

$$\underset{\substack{\text{sferiche}\\ \text{geografi}}}{=} 2\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \rho \sin\varphi \cdot \rho^2 \cos\varphi = \underbrace{\int_0^2 d\rho\, \rho^3}_{\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{\left[\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 1}$$

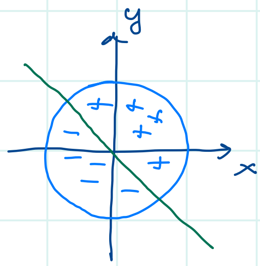
$$= 4\cdot 2\pi \cdot 1 = \boxed{8\pi}$$

— o — o —

$$\int_S |y+z|\, dx\,dy\,dz \underset{\text{simmetria}}{=} \int_S |x+y|\, dx\,dy\,dz$$

$$\underset{\substack{\text{sferiche}\\ \text{geografi}}}{=} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \rho\cos\varphi\, |\cos\theta + \sin\theta|\, \rho^2 \cos\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 4} \int_0^{2\pi} |\cos\theta + \sin\theta|\, d\theta \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi}_{\frac{\pi}{2}}$$



$$= 2\pi \int_0^{2\pi} |\cos\theta + \sin\theta|\, d\theta =$$

$$\underset{\text{simmetria}}{=} 4\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = 4\pi \left[\sin\theta - \cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{8\sqrt{2}\,\pi}$$

— o — o —

Alternativa per (b): cambio di variabili, tipo
$$u = x, \quad v = \frac{y+z}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{y-z}{\sqrt{2}}$$
che riduce l'integrale al precedente.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \arctan(xy + y^6) - \sin(x^2 + y^4).$$

(a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.

(b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine 8 di $f(x, y)$, calcolate nell'origine.

(c) Determinare se l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$ è limitato oppure no.

(a) $f(x,y) = xy - x^2 + o(x^2+y^2)$

Taylor ordine 2

$\rightsquigarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono termini lineari)

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $= -1 \rightsquigarrow$ forma quadratica indefinita

$\rightsquigarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ p.to di sella}}$

(b) $f(x,y) = xy + y^6 - \frac{1}{3}(xy+y^6)^3 - (x^2+y^4) + \frac{1}{6}(x^2+y^4)^3 + o((x^2+y^2)^4)$

Taylor ordine 8

$= xy + y^6 - \frac{1}{3}x^3y^3 - x^2 - y^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}\cdot 3x^4y^4 + o((x^2+y^2)^4)$

$\rightsquigarrow$ L'unico termine di ordine 8 è $\frac{1}{2}x^4y^4 = \frac{1}{4!\,4!}\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0)$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{L'unica derivata di ordine 8 diversa da 0 è } \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0) = \frac{4!\,4!}{2} = 288}$

(c) Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(0, \sqrt[4]{2n\pi}\right) = \frac{\pi}{2} < 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(0, \sqrt[4]{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 > 2$$

Ne segue che l'insieme B $\boxed{\text{NON è limitato}}$ e contiene pure una successione che tende all'infinito sul semiasse positivo delle x.

(d) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale λ, il

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \min \left\{ f(x,y) : x^4 + y^2 \leq \varepsilon \right\}.$$

Dimostriamo che

$$\boxed{\lim = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \lambda = \frac{1}{2} \\ -\infty & \text{se } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}}$$

Idea: per ε molto piccolo è come se il punto di minimo fosse $(\pm\sqrt[4]{\varepsilon}, 0)$

Stima dall'alto $\quad \min\{\ldots\} \leq f\underbrace{(\sqrt[4]{\varepsilon}, 0)}_{} = -\sin(\sqrt{\varepsilon})$

questo punto rispetta la condizione $x^4+y^2 \leq \varepsilon$

Stima dal basso $\quad$ Se (x,y) verificano $x^4+y^2 \leq \varepsilon$, allora $|x| \leq \sqrt[4]{\varepsilon}$ e $|y| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Ma allora

$$xy + y^6 \geq xy \geq -\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

da cui

$$\arctan(xy+y^6) \geq -\arctan(\varepsilon^{3/4}).$$

Analogamente

$$\sin(x^2+y^4) \leq x^2+y^4 \leq \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^2.$$

Ne segue che

$$\min\{\ldots\} \geq -\arctan(\varepsilon^{3/4}) - \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon^2.$$

Dividendo per ε^λ e distinguendo i casi $\lambda \gtreqless \frac{1}{2}$ si ha la tesi

— o — o —

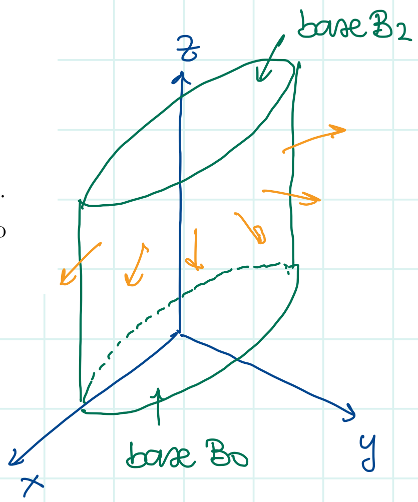
4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, z^3, x^2)$, e la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 9,\ 0 \le z \le 2\right\}.$$

(a) Determinare un campo vettoriale F tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare il flusso di E attraverso S, orientata nella direzione che si allontana dall'asse z.

(c) Calcolare il flusso del rotore di E attraverso S, con la stessa orientazione del punto precedente.



La superficie S è una specie di cilindro con basi ellittiche B_0 e B_2, corrispondenti a $z=0$ e $z=2$.

(a) Dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = y \\ A_z - C_x = z^3 \\ B_x - A_y = x^2 \end{cases} \rightsquigarrow C \equiv 0 \rightsquigarrow \begin{cases} -B_z = y & \rightsquigarrow B = -yz \\ A_z = z^3 & \rightsquigarrow A = \frac{1}{4}z^4 + \varphi(x,y) \\ B_x - A_y = x^2 & \rightsquigarrow -\varphi_y = x^2 \rightsquigarrow \varphi = -x^2 y \end{cases}$$

$$\boxed{F = \left(\tfrac{1}{4}z^4 - x^2 y,\ -yz,\ 0\right)} \quad \text{(definito a meno di gradienti)}$$

(b) Osservo che $\operatorname{div} E = 0$, quindi per il teorema della divergenza

$$0 = \iiint_{\underset{\text{cilindro}}{V}} \operatorname{div} E = \int_{\partial V} \langle E, \underset{\text{esterna}}{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle E, \underset{\text{giusta}}{n} \rangle d\sigma + \int_{B_0} \langle E, \underset{(0,0,-1)}{n} \rangle d\sigma + \int_{B_2} \langle E, \underset{(0,0,1)}{n} \rangle d\sigma$$

Quindi

$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = -\int_{B_0} \langle \underset{(y,0,x^2)}{E}, (0,0,-1) \rangle d\sigma - \int_{B_2} \langle \underset{(y,8,x^2)}{E}, (0,0,1) \rangle d\sigma$$

$$= + \int_{x^2+4y^2 \le 9} x^2\, dx\, dy - \int_{x^2+4y^2 \le 9} x^2\, dx\, dy = \boxed{0}$$

(c) Osserviamo che $\operatorname{rot} E = (-3z^2, -2x, -1)$, da cui come nel p.to precedente

$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = -\int_{B_0} 1 - \int_{B_2} (-1) = -\text{Area}(B_0) + \text{Area}(B_2) = \boxed{0}$$

— o — o —

(alternativa: Stokes)