

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 17 Gennaio 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 82\}$$

e le funzioni

$$f(x, y) = 9y + x^2, \quad g(x, y) = 2y - 4x^3.$$

Per ciascuna di esse, determinare massimo e minimo in A , precisando anche quali sono i punti di minimo/massimo.

2. Sia S la sfera con centro nell'origine di \mathbb{R}^3 e raggio 2.

Calcolare

$$\int_S |y| \, dx \, dy \, dz, \quad \int_S |y + z| \, dx \, dy \, dz.$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \arctan(xy + y^6) - \sin(x^2 + y^4).$$

- (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e specificare di che tipo di punto stazionario si tratta.
- (b) Determinare i valori di tutte le derivate parziali di ordine 8 di $f(x, y)$, calcolate nell'origine.
- (c) Determinare se l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$ è limitato oppure no.
- (d) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale λ , il

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \min \{f(x, y) : x^4 + y^2 \leq \varepsilon\}.$$

4. Consideriamo il campo vettoriale $E = (y, z^3, x^2)$, e la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 9, \, 0 \leq z \leq 2\}.$$

- (a) Determinare un campo vettoriale F tale che $\operatorname{rot} F = E$ in tutto \mathbb{R}^3 .
- (b) Calcolare il flusso di E attraverso S , orientata nella direzione che si allontana dall'asse z .
- (c) Calcolare il flusso del rotore di E attraverso S , con la stessa orientazione del punto precedente.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.