Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 14 Gennaio 2023

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (-1, -2, 4), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (2, 0, 1).$$

   (a) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (b) Determinare l'intersezione tra la retta AB e il piano che passa per C ed è parallelo al piano di equazione $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per l'origine e per il punto C, ma non interseca la retta AB.

2. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due sottospazi

$$V = \mathrm{Span}((1, 0, 1, 0), (0, -2, 1, -3)),$$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = y + z + w = 0\}.$$

   (a) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, di W e di $W^\perp$.

   (b) Determinare una base di $V + W$ e di $V \cap W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo nel piano il punto $P = (1, 2)$ e la retta r di equazione $x + 3y = 4$.

   (a) Determinare i seni degli angoli acuti del triangolo rettangolo che la retta r forma con gli assi cartesiani.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando r di $90°$ in senso orario intorno al punto P.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana delle rette che passano per il punto P e formano con r un angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (-1, -2, 4), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (2, 0, 1).$$

(a) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

(b) Determinare l'intersezione tra la retta AB e il piano che passa per C ed è parallelo al piano di equazione $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per l'origine e per il punto C, ma non interseca la retta AB.

(a) retta $AB = (0,1,1) + t(1,3,-3) = (t, 1+3t, 1-3t)$

Piano per C e $\perp$ alla retta $\quad x+3y-3z=-1$

Intersezione piano / retta $\quad t+\cancel{3}+9t-\cancel{3}+9t=-1 \rightsquigarrow t=-\frac{1}{19}$

$$\boxed{\left(-\frac{1}{19}, \frac{16}{19}, \frac{22}{19}\right)}$$

(b) Piano per C parallelo al piano dato $\quad x+2y+3z=5$

Intersezione $\quad t+\cancel{2}+6t+\cancel{3}-9t=\cancel{5} \rightsquigarrow t=0$

$$\boxed{(0,1,1)}$$

(c) Equazione parametrica: $\quad t(2,0,1)+s(1,3,-3)$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{matrix} \rightsquigarrow (-3,7,6) \rightsquigarrow \boxed{-3x+7y+6z=0}$$

Verifica: $-3t+7+21t+6-18t=0 \rightsquigarrow 13=0 \rightsquigarrow$ impossibile

— o — o —

Alternativa per (a). La distanza al quadrato tra C e $(t, 1+3t, 1-3t)$ è

$$\|(t-2, 1+3t, -3t)\|^2 = (t-2)^2+(1+3t)^2+9t^2$$
$$= t^2-4t+4+1+9t^2+6t+9t^2 = 19t^2+2t+5$$

Questa è minima quando $\quad 38t+2=0$, cioè $t=-\frac{1}{19}$.

— o — o —

Alternativa per (c). Il generico piano per l'origine è $ax+by+cz=0$.

Impongo che passi per C: $\quad 2a+c=0$

Impongo che non intersechi retta AB: $\quad at+b(1+3t)+c(1-3t)=0$

$$\underbrace{(a+3b-3c)}_{=0}t = -\underbrace{(b+c)}_{\neq 0} \rightsquigarrow \text{Risolvo} \begin{cases} 2a+c=0 \\ a+3b-3c=0 \end{cases} \text{ e spero } b+c\neq 0.$$

— o — o —

2. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due sottospazi

$$V = \mathrm{Span}((1,0,1,0),(0,-2,1,-3)),$$

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y = y+z+w = 0\}.$$

(a) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, di W e di $W^\perp$.

(b) Determinare una base di $V+W$ e di $V \cap W$.

(a) $\begin{cases} x+2y = 0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$ $\quad z=t,\ w=s,\ y=-t-s,\ x=2t+2s$

$(x,y,z,w) = t\underbrace{(2,-1,1,0)}_{w_1} + s\underbrace{(+2,-1,0,1)}_{w_2}$

base di W, da rendere ortogonale con GS

$$w_2 - \frac{\langle w_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1 = (2,-1,0,1) - \frac{5}{6}(2,-1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, 1\right)$$

Base ortogonale di W : $\boxed{(2,-1,1,0),\ (2,-1,-5,6)}$ → Verifica: stanno in W e sono ortogonali

Equazioni di $W^\perp$: $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 2x-y-5z+6w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ z-w=0 \end{cases}$

$y=2t,\ w=2s,\ z=2s,\ x=t-s$

$(x,y,z,w) = t\underbrace{(1,2,0,0)}_{w_3} + s\underbrace{(-1,0,2,2)}_{w_4}$ ⇝ base di $W^\perp$ da rendere ortog.

$$w_4 - \frac{\langle w_4,w_3\rangle}{\langle w_3,w_3\rangle} w_3 = (-1,0,2,2) - \frac{-1}{5}(1,2,0,0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 2, 2\right)$$

Base ortogonale di $W^\perp$: $\boxed{(1,2,0,0),\ (-2,1,5,5)}$ → Verifica: stanno in $W^\perp$ e sono ortogonali

(b) $V = \mathrm{Span}(\underbrace{(1,0,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,-2,1,-3)}_{v_2})$ $\quad W = \mathrm{Span}(\underbrace{(2,-1,1,0)}_{v_3}, \underbrace{(2,-1,0,1)}_{v_4})$

$\mathrm{Det}(v_1|v_2|v_3|v_4) = 0$ ⇝ c'è almeno una relazione di dip. lineare

$av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0 \iff$

$$\begin{cases} a \quad\ \ +2c+2d = 0 \\ \ \ -2b - c \ \ - d = 0 \\ a + b + c \qquad\ = 0 \\ \ \ -3b \qquad + d = 0 \end{cases}$$

$d = 3b$, $\quad c = -2b-d = -5b$, $\quad a = -2c-2d = 4b$

$\Rightarrow \boxed{4v_1 + v_2 - 5v_3 + 3v_4 = 0}$ Verifica!

$\boxed{\text{Base di } V+W = 3 \text{ a scelta tra } v_1, v_2, v_3, v_4}$

$\boxed{\text{Base di } V\cap W} = 4v_1 + v_2 \boxed{= (4,-2,5,-3)}$

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= -\lambda(2-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-6] \\ &= -\lambda(2-\lambda)(\cancel{6}-5\lambda+\lambda^2-\cancel{6}) \\ &= -\lambda(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda) \\ &= -\lambda^2(2-\lambda)(\lambda-5) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono $0, 0, 2, 5$. Serviono gli autospazi.

$\boxed{\lambda=0}$ $(1,0,0,-1)$ e $(0,1,-1,0)$ (si vedono a occhio)

$\boxed{\lambda=2}$ $(0,0,1,0)$ (anche questo si vede a occhio)

$\boxed{\lambda=5}$

$$A - 5\,Id = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Ker} = \text{Span}((2,0,0,3))$$

Basta quindi porre

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Verifica che $M^{-1}AM = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
anche nella forma equivalente

$AM = MD$

— o — o —

4. Consideriamo nel piano il punto $P = (1, 2)$ e la retta r di equazione $x + 3y = 4$.

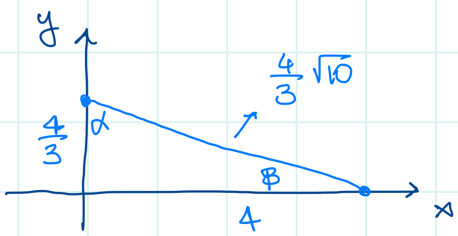
(a) Determinare i seni degli angoli acuti del triangolo rettangolo che la retta r forma con gli assi cartesiani.

(b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando r di $90°$ in senso orario intorno al punto P.

(c) Determinare l'equazione cartesiana delle rette che passano per il punto P e formano con r un angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

(a)



Ipotenusa $= \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\beta = \frac{4}{3}\,\frac{3}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin\alpha = 4\,\frac{3}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{array}}$$

(b) $(x,y) \rightsquigarrow (x-1, y-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 \\ -x+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y-1 \\ -x+3 \end{pmatrix}$

retta r in parametrica $(4,0) + t(-3,1) = (4-3t, t)$

Immagine in parametrica $(t-1, -4+3t+3) = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{t-1}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{3t-1}})$

$t = x+1$, $y = 3t-1 = 3x+3-1 = 3x+2$

$\boxed{y = 3x+2}$ ← immagine in cartesiana

(c) Cerco (a,b) t.c. $\dfrac{(a,b)\cdot(-3,1)}{\|(a,b)\|\cdot\|(-3,1)\|} = \dfrac{\pm 3}{\sqrt{130}}$

(il $\pm$ è perché due rette formano 2 angoli a somma $180°$)

$$\frac{-3a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\,\cancel{\sqrt{10}}} = \frac{\pm 3}{\cancel{\sqrt{10}}\,\sqrt{13}}$$

$\rightsquigarrow (9a^2 - 6ab + b^2)\,13 = 9a^2 + 9b^2$

$\rightsquigarrow 4b^2 - 78ab + 108a^2 = 0$

$\rightsquigarrow 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 39\left(\frac{b}{a}\right) + 54 = 0$

$$\frac{b}{a} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 8\cdot 54}}{4} = \frac{39 \pm 33}{4} = \begin{cases} \nearrow \frac{3}{2} \\ \searrow 18 \end{cases}$$

$(a,b) = (1, 18)$

$(1,2) + t(1, 18)$

$(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{1+t}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{2+18t}})$

$y = 2 + 18t = 2 + 18(x-1)$
$= +18x - 16$

$\boxed{y = 18x - 16}$ Verifica!

$(a,b) = (2, 3)$

$(1,2) + t(2, 3)$

$(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{1+2t}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{2+3t}})$

$y = 2 + 3t = 2 + \frac{3}{2}(x-1) = +\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$\boxed{3x - 2y + 1 = 0}$ Verifica!