

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 14 Gennaio 2023

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (-1, -2, 4), \quad B = (0, 1, 1), \quad C = (2, 0, 1).$$

- (a) Determinare il punto della retta AB più vicino a C .
- (b) Determinare l'intersezione tra la retta AB e il piano che passa per C ed è parallelo al piano di equazione $x + 2y + 3z + 4 = 0$.
- (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per l'origine e per il punto C , ma non interseca la retta AB .

2. In \mathbb{R}^4 consideriamo i due sottospazi

$$V = \text{Span}((1, 0, 1, 0), (0, -2, 1, -3)),$$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = y + z + w = 0\}.$$

- (a) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, di W e di W^\perp .
- (b) Determinare una base di $V + W$ e di $V \cap W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo nel piano il punto $P = (1, 2)$ e la retta r di equazione $x + 3y = 4$.

- (a) Determinare i seni degli angoli acuti del triangolo rettangolo che la retta r forma con gli assi cartesiani.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando r di 90° in senso orario intorno al punto P .
- (c) Determinare l'equazione cartesiana delle rette che passano per il punto P e formano con r un angolo θ tale che

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.