Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 17 Dicembre 2022

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y, z) = x - y + z$ al variare di $(x, y, z) \in A$ precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2. Consideriamo la figura

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2^x \right\}$$

e il solido V che si ottiene da una rotazione completa di F intorno all'asse x di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V.

   (b) Calcolare il flusso del campo $E = (x, x, x)$ uscente dalla superficie laterale di V.

3. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t - t^2, t - 2t^2)$, con $t \in [0, 2]$, e la retta r di equazione $y = 3x$.

   (a) Determinare se la curva è semplice.

   (b) Fare un disegno approssimativo del sostegno della curva, determinando in particolare i punti in cui interseca gli assi cartesiani.

   (c) Detta D la parte di piano delimitata dalla retta r e dal sostegno della curva, calcolare

$$\max\{x + y : (x, y) \in D\}, \qquad \int_D y\, dx\, dy.$$

4. Per ogni $r > 0$ poniamo $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Per ogni $\alpha > 0$ consideriamo l'integrale

$$\int_{B_r} \frac{\sin(|x - y|)}{x^4 + y^\alpha}\, dx\, dy.$$

   (a) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 4$.

   (b) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 1$.

   (c) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale β, il

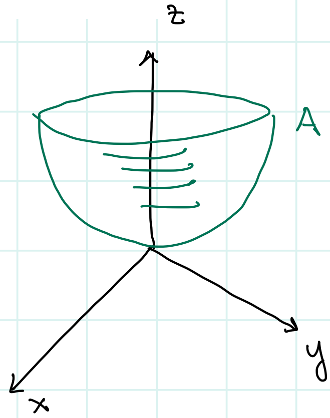
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\beta} \int_{B_\varepsilon} \frac{\sin(|x - y|)}{x^4 + y^\varepsilon}\, dx\, dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y, z) = x - y + z$ al variare di $(x, y, z) \in A$ precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.



$|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $z \in [0, 1] \Rightarrow A$ è compatto

Teo. Weierstrass $\Rightarrow$ max e min esistono.

$\nabla f(x,y,z)$ esiste ovunque e $\neq 0 \Rightarrow$ max e min sul bordo

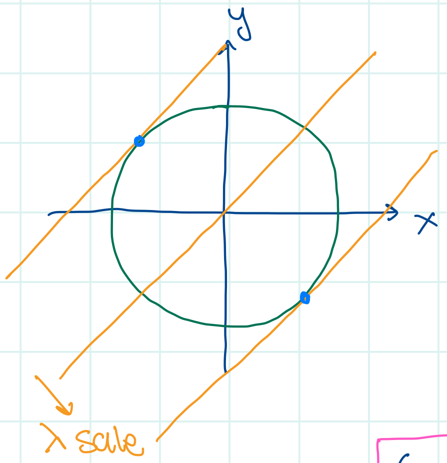
$\boxed{\text{Sup. laterale}}$ $\quad x^2+y^2-z=0$

1° sistema $\quad 2x=0 \quad 2y=0 \quad -1=0 \quad x^2+y^2-z=0$

no soluzioni

2° sistema
$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = -\lambda \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightsquigarrow \boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

$\boxed{\text{Cerchio in alto}}$ $\quad z = 1 \rightsquigarrow f(x,y,z) = x-y+1$ di cui devo fare max / min con il vincolo che $x^2+y^2 \le 1$



$x - y + 1 = \lambda$

$\boxed{\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 1\right)}$ $\qquad$ $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 1\right)}$

In conclusione abbiamo 3 candidati:

p.to min

$\boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \rightsquigarrow f = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ Min

$\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 1\right) \rightsquigarrow f = -\sqrt2 + 1 > -\frac{1}{2}$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 1\right)} \rightsquigarrow f = \boxed{\sqrt2 + 1}$

Max

p.to max

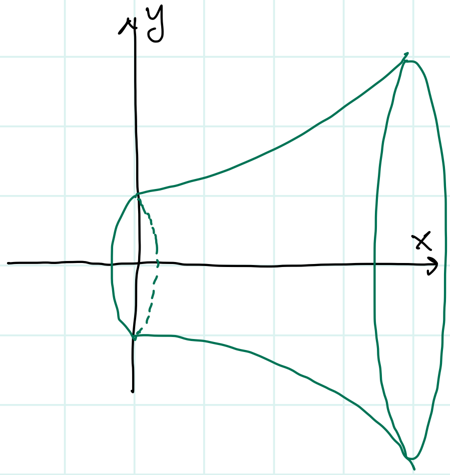
2. Consideriamo la figura

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2^x\}$$

e il solido V che si ottiene da una rotazione completa di F intorno all'asse x di $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V.

(b) Calcolare il flusso del campo $E = (x, x, x)$ uscente dalla superficie laterale di V.



(a) $\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_0^2 (2^x)^2 dx = \pi \int_0^2 4^x dx$

$= \pi \left[\frac{4^x}{\log 4} \right]_{x=0}^{x=2} = \boxed{\frac{15\pi}{\log 4}}$

$G = \text{baricentro} = (x_G, \underset{\downarrow}{y_G}, \underset{\downarrow}{z_G})$

$= 0$ per simmetria

$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \pi \int_0^2 x\, 4^x dx = \pi \left\{ \left[\frac{x 4^x}{\log 4} \right]_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \frac{4^x}{\log 4} dx \right\}$

$= \pi \left\{ \frac{32}{\log 4} - \frac{1}{\log^2 4} \left[4^x \right]_{x=0}^{x=2} \right\} = \pi \left\{ \frac{32}{\log 4} - \frac{15}{\log^2 4} \right\}$

$x_G = \pi \left\{ \frac{32}{\log 4} - \frac{15}{\log^2 4} \right\} \frac{\log 4}{15\pi} = \boxed{\frac{32}{15} - \frac{1}{\log 4}}$

(b) $\iiint_V \underset{1}{\underset{\|}{\mathrm{div}\, E}}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{B_0} \dots + \int_{\mathrm{lat}} \dots + \int_{B_2} \dots$

base con $x=0$

quello che vogliamo

base con $x=2$

$= \mathrm{Vol}(V)$

$\Rightarrow \int_{\mathrm{Sup.\,lat}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \mathrm{Vol}(V) - \int_{B_0} \langle \vec{E}, (-1,0,0) \rangle d\sigma - \int_{B_2} \langle \vec{E}, (1,0,0) \rangle d\sigma$

$= 0$ su B_0

$(2,2,2)$ su B_2

$= \mathrm{Vol}(V) - 2\, \mathrm{Area}(B_2)$

cerchio di raggio 4

$= \boxed{\frac{15\pi}{\log 4} - 32\pi}$

— o — o —

3. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t - t^2, t - 2t^2)$, con $t \in [0, 2]$, e la retta r di equazione $y = 3x$.

(a) Determinare se la curva è semplice.

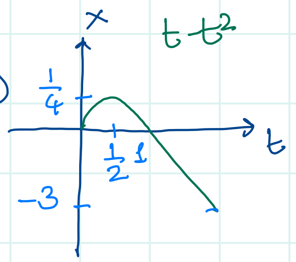
(b) Fare un disegno approssimativo del sostegno della curva, determinando in particolare i punti in cui interseca gli assi cartesiani.

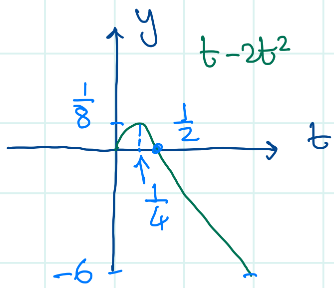
(c) Detta D la parte di piano delimitata dalla retta r e dal sostegno della curva, calcolare

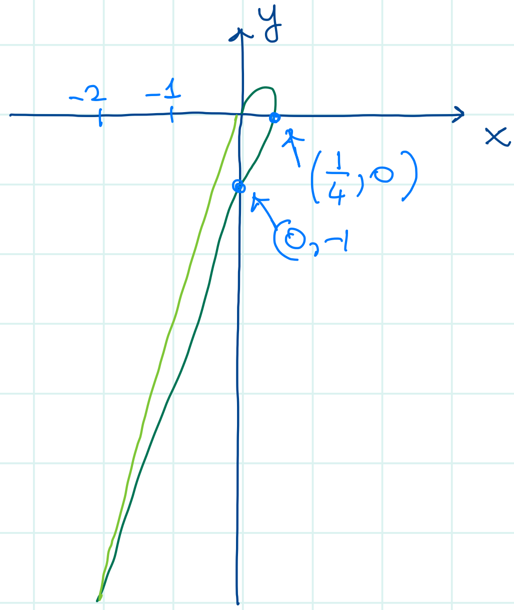
$$\max\{x + y : (x, y) \in D\}, \qquad \int_D y\, dx\, dy.$$

(a) $x - y = t^2$ è una quantità monotona per $t \in [0,2]$

(b)







- Per $t \in [0, \frac{1}{4}]$ si ha che $x \nearrow$ e $y \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ si ha che $x \nearrow$ e $y \searrow$
- Per $t \in [\frac{1}{2}, 2]$ si ha che $x \searrow$ e $y \searrow$

(c) Verifico che il sostegno di γ sta sotto la retta $y = 3x$

$y \leq 3x \iff t - 2t^2 \leq 3(t - t^2) \iff t^2 - 2t \leq 0 \iff t \in [0, 2]$

Il max di $x+y$ è raggiunto su ∂D e nel primo quadrante, dunque sulla curva $\quad x+y = t - t^2 + t - 2t^2 = 2t - 3t^2$

$\rightsquigarrow$ max per $t = \frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Per l'integrale consideriamo il campo $E = (xy, 0)$ per cui

$$\iint_D y\, dx\, dy = \iint_D \operatorname{div} E = \int_{\partial D} xy\, dy$$

curva che percorre ∂D nel modo giusto

$\partial D = \gamma_1$ unito γ_2 con

γ_1 = curva data percorsa al contrario

$\gamma_2(t) = (-t, -3t)$ con $t \in [0, 2]$

segmento da $(0,0)$ a $(-2,-6)$

$$= -\int_0^2 (t - t^2)(t - 2t^2)(1 - 4t)\, dt + \int_0^2 (-t)(-3t)(-3)\, dt = \boxed{-\frac{44}{15}}$$

4. Per ogni $r > 0$ poniamo $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Per ogni $\alpha > 0$ consideriamo l'integrale

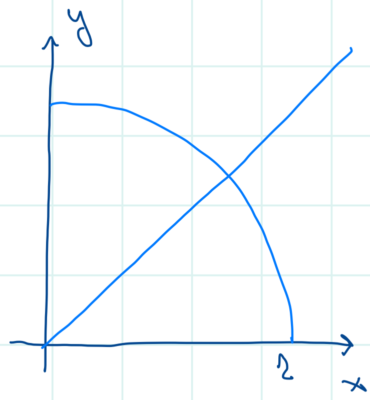
$$\int_{B_r} \frac{\sin(|x-y|)}{x^4 + y^\alpha}\, dx\, dy.$$

(a) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 4$.

(b) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 1$.

(c) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale β, il

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\beta} \int_{B_\varepsilon} \frac{\sin(|x-y|)}{x^4 + y^\varepsilon}\, dx\, dy.$$



L'unico problema è nell'origine, quindi possiamo assumere $r \leq 1$ e integranda positiva

(a) Scelgo $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{4}$. Allora

$$\int_{B_r} \frac{\sin(|x-y|)}{x^4+y^4}\, dx\, dy \geq \int_0^r d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin(\rho \overbrace{|\cos\theta - \sin\theta|}^{\geq m > 0 \text{ in } [\theta_1, \theta_2]})}{\rho^4 \underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{\leq 2}} \cdot \rho\, d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^r \frac{\sin(m\rho)}{\rho^3}\, d\rho$$ che $\boxed{\text{diverge}}$ per confr. asint. con $\frac{1}{\rho^2}$

(b) Poniamo $x = u$, $y = v^4$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4v^3 \end{pmatrix} = J$$

$$\int_{B_r} \dots\, dx\, dy = \int_{C_r} \frac{\sin(|u - v^4|)}{u^4 + v^4}\, 4v^3\, du\, dv$$

$$\leq 4 \int_{C_r} \frac{v^3}{u^4 + v^4}\, du\, dv$$

dove $C_r = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^8 \leq r^2\}$

Ancora una volta l'unico problema è nell'origine e passando in coord. polari

$$\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\cancel{\rho^3} \overbrace{\sin^3\theta}^{\leq 1}}{\cancel{\rho^4} \underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{\geq m > 0}} \cdot \cancel{\rho}$$ e questo $\boxed{\text{converge}}$

(c)

$$\lim = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 3 \\ I & \text{se } \beta = 3 \\ +\infty & \text{se } \beta > 3 \end{cases}$$

con

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta - \sin\theta|\, d\theta = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

$\boxed{\text{Idea}}$ $\displaystyle\int_{B_\varepsilon} \dots \sim \int_{B_\varepsilon} \frac{|x-y|}{\underbrace{x^4}_{\sim 0}+\underbrace{y^\varepsilon}_{\sim 1}}\,dx\,dy \sim \int_{B_\varepsilon} |x-y|\,dx\,dy = \int_0^\varepsilon \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} |\cos\theta - \sin\theta|\,d\theta$

Stima dall'alto

$$\int_{B_\varepsilon} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x \leq x}}{\leq} \int_{B_\varepsilon} \frac{|x-y|}{x^4+y^\varepsilon} \leq \int_{B_\varepsilon} \frac{|x-y|}{y^\varepsilon} = \underbrace{\int_0^\varepsilon \rho^{2-\varepsilon} d\rho}_{\text{si fa}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta - \sin\theta|}{\sin^\varepsilon\theta}\,d\theta$$

e poi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta - \sin\theta|}{\sin^\varepsilon\theta}\,d\theta = \int_0^\varepsilon \frac{\overbrace{|\cos\theta - \sin\theta|}^{\leq 2}}{\underbrace{\sin^\varepsilon\theta}_{\geq \left(\frac{\theta}{2}\right)^\varepsilon}}\,d\theta + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta - \sin\theta|}{\underbrace{\sin^\varepsilon\theta}_{\geq \sin^\varepsilon(\varepsilon)}}\,d\theta$$

$$\leq \underbrace{2\cdot 2^\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{1}{\theta^\varepsilon}\,d\theta}_{\text{si fa e tende a } 0} + \underbrace{\frac{1}{\sin^\varepsilon(\varepsilon)}}_{\to 1} \underbrace{\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta - \sin\theta|\,d\theta}_{\downarrow \atop \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta - \sin\theta|\,d\theta}$$

Stima dal basso

$$\int_{B_\varepsilon} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x \geq \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} x}}{\geq} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \frac{|x-y|}{x^4+y^\varepsilon} \underset{\substack{\uparrow \\ x \leq \varepsilon \\ y \leq \varepsilon}}{\geq} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} \frac{|x-y|}{\varepsilon^4+\varepsilon^\varepsilon} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{1}{\varepsilon^4+\varepsilon^\varepsilon}}_{\to 1} \underbrace{\int_0^\varepsilon \rho^2 d\rho}_{\text{si fa}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta - \sin\theta|\,d\theta$$

— o — o —