

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 17 Dicembre 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y, z) = x - y + z$ al variare di $(x, y, z) \in A$ precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2. Consideriamo la figura

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2^x\}$$

e il solido V che si ottiene da una rotazione completa di F intorno all'asse x di \mathbb{R}^3 .

- (a) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V .
(b) Calcolare il flusso del campo $E = (x, x, x)$ uscente dalla superficie laterale di V .
3. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t - t^2, t - 2t^2)$, con $t \in [0, 2]$, e la retta r di equazione $y = 3x$.
- (a) Determinare se la curva è semplice.
(b) Fare un disegno approssimativo del sostegno della curva, determinando in particolare i punti in cui interseca gli assi cartesiani.
(c) Detta D la parte di piano delimitata dalla retta r e dal sostegno della curva, calcolare

$$\max\{x + y : (x, y) \in D\}, \quad \int_D y \, dx \, dy.$$

4. Per ogni $r > 0$ poniamo $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Per ogni $\alpha > 0$ consideriamo l'integrale

$$\int_{B_r} \frac{\sin(|x - y|)}{x^4 + y^\alpha} \, dx \, dy.$$

- (a) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 4$.
(b) Studiare la convergenza dell'integrale nel caso $\alpha = 1$.
(c) (Bonus question) Calcolare, al variare del parametro reale β , il

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\beta} \int_{B_\varepsilon} \frac{\sin(|x - y|)}{x^4 + y^\varepsilon} \, dx \, dy.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.