Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y\}, \qquad f(x,y) = \frac{xy^2}{1+x^2+4y^4}.$$
   (a) Determinare estremo inferiore e superiore di f in A specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.
   (b) (Bonus) Sia $A_R := A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le R^2\}$ e sia
$$I_R := \int_{A_R} f(x,y)\,dx\,dy.$$
   Calcolare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{R\to+\infty} R^\beta I_R.$$

2. Sia $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+y+z \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$. Calcolare
$$\int_T |x+y+z-1|\,dx\,dy\,dz.$$

3. Si consideri per $\alpha > 0$ l'insieme $D_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le x^\alpha,\ \ x \ge 1\}$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale
$$\int_{D_\alpha} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

4. Si consideri la curva del piano data da $\gamma(t) = (\sin t - \cos t, \sin t + \cos t)$ per $0 \le t \le \pi$.
   (a) Provare che γ è semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Determinare le intersezioni fra la curva γ e la retta $x+y=0$.
   (c) Sia D la porzione di piano racchiusa da γ e dalla retta $x+y=0$. Calcolare l'area di D.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x,y) = x^2y^8e^{-x^2y^4} - \arctan(xy+y^2)$.

   (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.

   (b) Determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ specificando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

   (c) (Bonus) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui la funzione

   $$f_\alpha(x,y) = |x|^\alpha y^8 e^{-x^2y^4} - \arctan(xy+y^2)$$

   è limitata su $\mathbb{R}^2$ ed in tal caso calcolarne il sup su $\mathbb{R}^2$.

2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,0)$. Sia $f(x,y) = |x+y^2-2|$. Determinare estremo inferiore e superiore di f in T specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.

3. Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 1\}$. Sia V_α il solido ottenuto da una rotazione di A di un angolo α intorno all'asse delle y nella direzione delle z negative.

   (a) Nel caso $\alpha = 2\pi$ calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V_α.

   (b) Nel caso $\alpha = \pi/3$ calcolare il volume e le coordinata z del baricentro di V_α.

4. Si consideri la superficie

   $$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + x^4z^4 + y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$$

   orientata prendendo in $(1,1,1)$ la normale che punta verso le x positive. Sia $F(x,y,z) = (3x^2z, x^2+y, x\sin(z^2))$. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.