Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 17 Settembre 2022

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (3, 2, 1), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (-1, 0, 0).$$

   (a) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana di due piani che hanno come intersezione la retta AB.

2. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

   (a) è invertibile,

   (b) è invertibile con inversa a coefficienti interi,

   (c) ammette l'autovalore $\lambda = 4$,

   (d) è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale (ed in tal caso determinare tale matrice ortogonale).

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (3, 2, 1), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (-1, 0, 0).$$

(a) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

(b) Determinare l'area del triangolo.

(c) Determinare l'equazione cartesiana di due piani che hanno come intersezione la retta AB.

(a) Retta BC : $(0,1,1) + t(1,1,1) = (t, 1+t, 1+t)$

Piano per A e $\perp$ retta BC: $x+y+z = 6$

Intersezione : $t+1+t+1+t = 6 \rightsquigarrow 3t = 4 \rightsquigarrow t = \frac{4}{3} \rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)}$

↑ punto H

(b) $A-C = (4,2,1) \qquad B-C = (1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,-3,2)$$

↑ verifica a mente che è ortogonale a entrambi

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|(1,-3,2)\| = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

In alternativa : $\text{Area} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \left\|\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\| \cdot \|(1,1,1)\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{42}{9}} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

↑ serve anche come verifica

(c) Bastano due piani distinti passanti per A e B, ad esempio il piano per A, B, C, e il piano per A, B, origine.

$\boxed{x-3y+2z = -1}$ ← piano per A, B, C (verifica!)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,-3,3) \rightsquigarrow \boxed{x-3y+3z = 0}$$

(verifica!)

↑ piano per A, B, origine

In alternativa: trovare due qualunque soluz. lin. indip. di

$$\begin{cases} 3a+2b+c = d & \leftarrow \text{passaggio per } A \\ b+c = d & \leftarrow \text{passaggio per } B \end{cases}$$

— o — o —

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

(a) è invertibile,

(b) è invertibile con inversa a coefficienti interi,

(c) ammette l'autovalore $\lambda = 4$,

(d) è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale (ed in tal caso determinare tale matrice ortogonale).

(a) Invertibile $\iff$ Det $A \neq 0 \iff 1-a \neq 0 \iff \boxed{a \neq 1}$

(b) Invertibile con inversa a coeff. interi $\iff$ Det $A = \pm 1$

$\iff 1-a = \pm 1 \iff \boxed{\begin{matrix} a=0 \\ a=2 \end{matrix}}$

Infatti Det $(A) \cdot$ Det $(A^{-1}) = 1$ e se sono entrambi interi l'unica possibilità è ± 1

(c) $\lambda = 4$ è autovalore $\iff$ Det $(A - 4\,Id) = 0$

$$\iff \text{Det} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ a & 0 & -3 \end{pmatrix} = 0 \iff -27 + 3a = 0 \iff \boxed{a = 9}$$

verifica che in questo caso $A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) A diag. mediante matrice ortog.

$\iff$ A simmetrica $\iff \boxed{a=1}$ (abbiamo usato teo. spettrale)

In questo caso autovalori / autovettori sono

$\lambda = 0$ (si vede ad occhio) con $v = (1, 0, -1)$

$\lambda = 1$ (si vede ad occhio) con $v = (0, 1, 0)$

$\lambda = 2$ (si vede dalla traccia) con $v = (1, 0, 1)$

Di conseguenza

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

verifica che $MM^t = Id$ e $M^t A M$ = Diagonale

In alternativa: fare Det $(A - \lambda\, Id) = 0$ per trovare gli autovalori e quindi gli autovettori.

— o — o —