Basi ortogonali e ortonormali 1

Argomenti: Basi ortogonali e ortonormali **Difficoltà:** $\star\star\star$

Prerequisiti: prodotto scalare, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

---

1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che contiene il vettore $(1,2)$.
2. Determinare per quali valori del parametro a si ha che $\{(1,2),(3,a)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che $\{(1,2,3),(4,5,a),(6,b,c)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
4. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1,v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $\mathrm{Span}(v_1)=\mathrm{Span}((3,4))$.
5. Sia $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1,v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2\in V$.
6. Sia $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1,v_2,v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1=(3,a,b)$, $v_2\in W$ e $v_3\in W$.
7. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da 3 vettori che hanno la stessa prima componente.
8. Siano $W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1,v_2,v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_1\in W_1\cap W_2$ e $v_2\in W_2$.
9. Determinare per quali valori dei parametri a, b, $\ldots$, f si ha che
$$\{(1,1,1,1),(2,a,2,2),(3,3,b,c),(d,e,f,-1)\}$$
è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
10. Determinare una base ortogonale $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che contiene il vettore $(1,2,2,1)$ e tale che $(1,1,0,-1)\in\mathrm{Span}(v_1,v_2)$. Fare in maniera che i vettori coinvolti abbiano tutte le componenti intere.
11. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che
    - $\mathrm{Span}(v_1)=\mathrm{Span}((1,1,0,0))$,
    - $\mathrm{Span}(v_1,v_2)=\mathrm{Span}((1,1,0,0),(1,0,1,0))$,
    - $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0))$,
    - tutti i 4 vettori che ne fanno parte hanno la prima componente positiva.
12. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:
$$(1,0,-1,2,0),\quad (1,1,0,0,-1),\quad (2,1,0,1,0),\quad (0,2,1,0,0),\quad (1,1,-1,1,1).$$
Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$ costituita da tutti vettori a coordinate intere, e tale che lo Span dei primi k vettori della base coincida con lo Span dei primi k vettori assegnati (per $k=1,2,\ldots,5$).

SOLUZIONI REV.01
BY GIMUSI 15/01/15

1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che contiene il vettore $(1,2)$.

$V_1 = (1,2) \qquad V_2 = (2,-1) \perp V_1 \implies SPAN(V_1, V_2) = \mathbb{R}^2$

2. Determinare per quali valori del parametro a si ha che $\{(1,2),(3,a)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.

$\langle (1,2),(3,a) \rangle = 3 + 2a = 0 \implies a = -3/2$

3. Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che $\{(1,2,3),(4,5,a),(6,b,c)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

$V_1 = (1,2,3) \perp V_2 = (4,5,a) \implies 4 + 10 + 3a = 0 \implies a = -14/3$

VER. $4 + 10 - \frac{42}{3} = \frac{12+30-42}{3} = 0$ OK!

$$V_3 = (6,b,c) \perp V_1, V_2 \implies \begin{cases} 6 + 2b + 3c = 0 \\ 24 + 5b - \frac{14}{3}c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = -\frac{3}{2}c - 3 \\ 24 - \frac{15}{2}c - 15 - \frac{14}{3}c = 0 \end{cases}$$

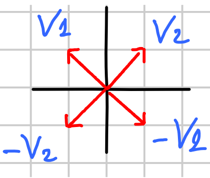
$$\implies \begin{cases} \frac{-45-28}{6}c = -9 \implies c = \frac{54}{73} \\ b = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\overset{27}{\cancel{54}}}{73} - 3 = \frac{-81-219}{73} = \frac{-300}{73} \end{cases} \implies V_3 = \left(6, \frac{-300}{73}, \frac{54}{73}\right)$$

$$\begin{cases} \text{VER. } V_3 \cdot V_1 = 6 - \frac{600}{73} + \frac{162}{73} = \frac{438-600+162}{73} = 0 \quad V \\ V_3 \cdot V_2 = 24 - \frac{1500}{73} - \frac{14}{\cancel{3}}\frac{\overset{18}{\cancel{54}}}{73} = \frac{1752-1500+252}{73} = 0 \quad V \end{cases}$$

4. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}((3,4))$.

$$V_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad V_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \quad \begin{cases} \{V_1, V_2\} & \{-V_1, V_2\} \\ \{V_1, -V_2\} & \{-V_1, -V_2\} \end{cases} = 2^2 = 4$$

5. Sia $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2 \in V$.



$$V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad V_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \begin{matrix} \{V_1, V_2\} & \{-V_1, V_2\} \\ \{V_1, -V_2\} & \{-V_1, -V_2\} \end{matrix} = 2^2 = 4$$

6. Sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3,a,b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.

$V_1 \perp W \implies (3,a,b) = \delta(1,2,-1) \implies \delta = 3 \qquad a = 6 \quad b = -3$

$V_1 = (3,6,-3)$

7. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da 3 vettori che hanno la stessa prima componente.

$$v_1 = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \qquad |v_1| = \sqrt{1+1/2+3/2} = \sqrt{3} \rightsquigarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$v_2 = \left(1, -\sqrt{2}, 0\right) \qquad |v_2| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \rightsquigarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$$

$$v_3 = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \qquad |v_3| = \sqrt{3} \rightsquigarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

8. Siano $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_2$.

$$W_1 \cap W_2 : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y=z/2 \end{cases} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \delta(0,1,2)$$

$$v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad v_3 \perp W_2 \Rightarrow v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, +\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_2 = (2\delta - s, \delta, s) \in W_2 \qquad w_2 \perp v_1 \Rightarrow \delta + 2s = 0 \quad \delta = -2s$$

$$\Rightarrow w_2 = (-5s, -2s, s) \Rightarrow v_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}\right)$$

$$n^\circ D \begin{cases} \{v_1,v_2,v_3\} \quad \{v_1,-v_2,v_3\} \quad \{v_1,v_2,-v_3\} \quad \{v_1,-v_2,-v_3\} \\ \{-v_1,v_2,v_3\} \quad \{-v_1,-v_2,v_3\} \quad \{-v_1,v_2,-v_3\} \quad \{-v_1,-v_2,-v_3\} \end{cases} = 2^3 = 8$$

9. Determinare per quali valori dei parametri $a, b, \ldots, f$ si ha che
$$\{(1,1,1,1), (2,a,2,2), (3,3,b,c), (d,e,f,-1)\}$$
è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = (1,1,1,1) \perp (2,a,2,2) = v_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow a+6=0 \qquad a=-6$$

$$v_3 = (3,3,b,c) \perp v_1, v_2 \Rightarrow \begin{cases} b+c=-6 \\ 6-18+2b+2c=0 \end{cases} \begin{cases} b+c=-6 \\ b+c=6 \end{cases} \rightsquigarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

10. Determinare una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che contiene il vettore $(1,2,2,1)$ e tale che $(1,1,0,-1) \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Fare in maniera che i vettori coinvolti abbiano tutte le componenti intere.

$$v_1 = (1,2,2,1) \qquad v_1 + \hat{v}_2 = (1,1,0,-1) \Rightarrow \hat{v}_2 = (0,-1,-2,-2)$$

$$v_2^* = \hat{v}_2 - \frac{\langle \hat{v}_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \hat{v}_2 - \frac{0-2-4-2}{10} v_1 = \hat{v}_2 + \frac{4}{5} v_1 = \left(\frac{4}{5}, -1+\frac{8}{5}, -2+\frac{8}{5}, -2+\frac{4}{5}\right)$$

$$v_2^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-6}{5}\right) \rightsquigarrow v_2 = (4, 3, -2, -6) \qquad \text{SPAN}\{v_1, \hat{v}_2\} = \text{SPAN}\{v_1, v_2\}$$

VD. ALGORITMO G-S

VERIFICA $\langle v_1, v_2 \rangle = 4+6-4-6 = 0$

$$a V_1 + b V_2 = (1,1,0,-1) \Rightarrow \begin{cases} a + 4b = 1 & \rightsquigarrow a = \frac{1}{5} \\ 2a + 3b = 1 & \rightsquigarrow 2/5 + 3/5 = 1 \\ 2a - 2b = 0 & \rightsquigarrow a = b \\ a - 6b = -1 & \rightsquigarrow 1/5 - 6/5 = -1 \end{cases}$$

$\hat{V}_3 = (2,-2,-1,2) \perp V_1$ E NON $//$ V_2

$$V_3^* = \hat{V}_3 - \frac{\langle \hat{V}_3, V_2 \rangle}{\langle V_2, V_2 \rangle} V_2 = \hat{V}_3 - \frac{8-3+2-12}{65} V_2 = \hat{V}_3 + \frac{1}{13} V_2 = \left(2+\frac{4}{13}, -2+\frac{3}{13}, -1-\frac{2}{13}, +2-\frac{6}{13}\right)$$

$$V_3^* = \left(\frac{30}{13}, -\frac{10}{13}, -\frac{15}{13}, +\frac{20}{13}\right) \rightsquigarrow V_3 = (6,-2,-3,+4) \quad \text{VER.} \begin{cases} \langle V_1, V_3 \rangle = 6-4-6+4=0 \\ \langle V_2, V_3 \rangle = 24-6+6-24=0 \end{cases}$$

$$V_4^* = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ 6 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$- e_4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = e_1(-16 + \cancel{24} - 9 - 4 - 36 - \cancel{24}) - e_2(-8 - 72 - \cancel{12} + \cancel{12} - 18 - 32) +$$

$$+ e_3(\cancel{12} - 72 - 8 - 18 - \cancel{12} - 32) - e_4(-9 - \cancel{24} - 16 - 36 - 4 + \cancel{24}) =$$

$$= e_1(-65) - e_2(-130) + e_3(-130) - e_4(-65) = (-65, 130, -130, 65)$$

$$V_4 = (-1, 2, -2, 1) \quad \text{VER.} \begin{cases} \langle V_4, V_1 \rangle = -1+4-4+1=0 \\ \langle V_4, V_2 \rangle = -4+6+4-6=0 \\ \langle V_4, V_3 \rangle = -6-4+6+4=0 \end{cases}$$

11. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

- $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}((1,1,0,0))$,
- $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}((1,1,0,0),(1,0,1,0))$,
- $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0))$,
- tutti i 4 vettori che ne fanno parte hanno la prima componente positiva.

$\bar{v}_1 = (1,1,0,0)$

$\hat{v}_2 = (1,0,1,0) \qquad \langle \bar{v}_1, \hat{v}_2 \rangle = 1 \neq 0$

$$v_2^* = \hat{v}_2 - \frac{\langle \hat{v}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle} \bar{v}_1 = \hat{v}_2 - \frac{1}{2} \bar{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad \bar{v}_2 = (1,-1,2,0)$$

$\mathrm{SPAN}\{\bar{v}_2, \bar{v}_1\} = \mathrm{SPAN}\{v_2^*, \bar{v}_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_2, \bar{v}_1\} \qquad \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = 0$

$\hat{v}_3 = (0,0,1,1) \qquad \langle \hat{v}_3, \bar{v}_1 \rangle = 0 \qquad \langle \hat{v}_3, \bar{v}_2 \rangle = 2$

$$v_3^* = \hat{v}_3 - \frac{\langle \hat{v}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle} \bar{v}_2 = \hat{v}_3 - \frac{2}{6} \bar{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \quad \bar{v}_3 = (1,-1,-1,-3)$$

$\mathrm{SPAN}\{\bar{v}_3, \bar{v}_2, \bar{v}_1\} = \mathrm{SPAN}\{v_3^*, \bar{v}_2, \bar{v}_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_3, \bar{v}_2, \bar{v}_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_3, \hat{v}_2, \bar{v}_1\} \qquad \langle \bar{v}_3, \bar{v}_2 \rangle = 0$

$$v_4^* = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = e_1(-6) - e_2(-6) + e_3\left[-3(+1)(-2)\right] - e_4(1+2+2+1) =$$

$$= (-6, 6, 6, -6), \quad \bar{v}_4 = (1,-1,-1,1)$$

$\Rightarrow$ UNA BASE ORTONORMALE CERCATA $\rightsquigarrow$ TUTTE $= 2^4 = 16$

$$\begin{cases} v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) & v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) \\ v_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\right) & v_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_2, -v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_2, v_3, -v_4\} \quad \{v_1, v_2, -v_3, -v_4\}$

$\{v_1, -v_2, v_3, v_4\} \quad \{v_1, -v_2, -v_3, v_4\} \quad \{v_1, -v_2, v_3, -v_4\} \quad \{v_1, -v_2, -v_3, -v_4\}$

$\{-v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \{-v_1, v_2, -v_3, v_4\} \quad \{-v_1, v_2, v_3, -v_4\} \quad \{-v_1, v_2, -v_3, -v_4\}$

$\{-v_1, -v_2, v_3, v_4\} \quad \{-v_1, -v_2, -v_3, v_4\} \quad \{-v_1, -v_2, v_3, -v_4\} \quad \{-v_1, -v_2, -v_3, -v_4\}$

12. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$(1,0,-1,2,0), \quad (1,1,0,0,-1), \quad (2,1,0,1,0), \quad (0,2,1,0,0), \quad (1,1,-1,1,1).$$

Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$ costituita da tutti vettori a coordinate intere, e tale che lo Span dei primi k vettori della base coincida con lo Span dei primi k vettori assegnati (per $k = 1, 2, \ldots, 5$).

$v_1 = (1,0,-1,2,0) \qquad \|v_1\|^2 = 6$

$\hat{v}_2 = (1,1,0,0,-1) \qquad \langle \hat{v}_2, v_1 \rangle = 1 \neq 0$

$$v_2^* = \hat{v}_2 - \frac{\langle \hat{v}_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \hat{v}_2 - \frac{1}{6} v_1 = \left(\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{-2}{6}, -1\right) \qquad v_2 = (5, 6, 1, -2, -6)$$

$\|v_2\|^2 = 102$

$\mathrm{SPAN}\{v_2, v_1\} = \mathrm{SPAN}\{v_2^*, v_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_2, v_1\} \qquad \langle v_2, v_1\rangle = 5-1-4 = 0$

$\hat{v}_3 = (2,1,0,1,0) \qquad \langle \hat{v}_3, v_1\rangle = 4 \neq 0 \qquad \langle \hat{v}_3, v_2\rangle = 14 \neq 0$

$$v_3^* = \hat{v}_3 - \frac{\langle \hat{v}_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle \hat{v}_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \hat{v}_3 - \frac{4}{6} v_1 - \frac{14}{102} v_2 = \hat{v}_3 - \frac{2}{3} v_1 - \frac{7}{51} v_2 =$$

$$= \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{35}{51}, 1 - \frac{42}{51}, \frac{2}{3} - \frac{7}{51}, 1 - \frac{4}{3} + \frac{14}{51}, +\frac{42}{51}\right) = \left(\frac{33}{51}, \frac{9}{51}, \frac{27}{51}, \frac{-3}{51}, \frac{42}{51}\right)$$

$v_3 = (11, 3, 9, -1, 14) \qquad \|v_3\|^2 = 121+9+81+1+196 = 408$

$\mathrm{SPAN}\{v_3, v_2, v_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_3, \hat{v}_2, v_1\} \qquad \langle v_3, v_2\rangle = 55+18+9+2-84 = 0$

$\langle v_3, v_1\rangle = 11 - 9 - 2 = 0$

$\hat{v}_4 = (0,2,1,0,0) \qquad \langle \hat{v}_4, v_1\rangle = -1 \neq 0 \quad \langle \hat{v}_4, v_2\rangle = 13 \qquad \langle v_4, v_3\rangle = 15$

$$v_4^* = \hat{v}_4 - \frac{-1}{6} v_1 - \frac{13}{102} v_2 - \frac{15}{408} v_3 = \hat{v}_4 + \frac{1}{6} v_1 - \frac{13}{102} v_2 - \frac{5}{136} v_3 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \underset{6\times 17}{\frac{65}{102}} - \underset{8\times 17}{\frac{55}{136}}, 2 - \frac{78}{102} - \frac{15}{136}, 1 - \frac{1}{6} - \frac{13}{102} - \frac{45}{136}, \frac{1}{3} + \frac{26}{102} + \frac{5}{136}, \frac{78}{102} - \frac{70}{136}\right)$$

$$= \left(\underset{24\times 17}{\frac{68-260-165}{408}}, \frac{816-312-45}{408}, \frac{408-68-52-135}{408}, \frac{136+104+15}{408}, \frac{312-210}{408}\right)$$

$$= \left(\frac{-357}{408}, \frac{459}{408}, \frac{153}{408}, \frac{255}{408}, \frac{102}{408}\right) = \left(\frac{-7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{2}{8}\right)$$

$v_4 = (7, -9, -3, -5, -2) \qquad \|v_4\|^2 = 49+81+9+25+4 = 168$

$\mathrm{SPAN}\{v_4, v_3, v_2, v_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_4, \hat{v}_3, \hat{v}_2, v_1\} \qquad \langle v_4, v_3\rangle = 77 - 27 - 27 + 5 - 28 = 0$

$\langle v_4, v_2\rangle = 35-54-3+10+12=0 \qquad \langle v_4, v_1\rangle = 7+3-10=0$

$\hat{v}_5 = (1,1,-1,1,1) \quad \langle \hat{v}_5, v_4\rangle = 7-9+3-5-2=-6 \quad \langle \hat{v}_5, v_3\rangle = 11+3-9-1+14 = 18$

$\langle \hat{v}_5, v_2\rangle = 5+6-1-2-6=2 \qquad \langle \hat{v}_5, v_1\rangle = 1+0+1+2+0 = 4$

$$v_5^* = \hat{v}_5 - \frac{-6}{168}v_4 - \frac{18}{408}v_3 - \frac{2}{102}v_2 - \frac{4}{6}v_1 = \hat{v}_5 + \frac{1}{28}v_4 - \frac{3}{68}v_3 - \frac{1}{51}v_2 - \frac{2}{3}v_1$$

$$= \Big(1+\underset{7\times 4}{\frac{7}{28}} - \underset{17\times 4}{\frac{33}{68}} - \underset{17\times 3}{\frac{5}{51}} - \frac{2}{3},\ 1-\frac{9}{28}-\frac{9}{68}-\frac{6}{51}+0,\ -1-\frac{3}{28}-\frac{27}{68}-\frac{1}{51}+\frac{2}{3},$$

$$,\ 1-\frac{5}{28}+\frac{3}{68}+\frac{2}{51}-\frac{4}{3},\ 1-\frac{2}{28}-\frac{42}{68}+\frac{6}{51}+0\Big) = \Big(\underset{3\times 4\times 7\times 17}{\frac{1428+357-693-140-952}{1428}},$$

$$,\frac{1428-459-189-168}{1428},\ \frac{-1428-153-567-28+952}{1428},\ \frac{1428-255+63+56-1904}{1428},$$

$$,\ \frac{1428-102-882+168}{1428}\Big) = \Big(\frac{0}{1428},\ \frac{\overset{6\times 102}{612}}{\underset{7\times 204}{1428}},\ \frac{-1224}{1428},\ \frac{-612}{1428},\ \frac{612}{1428}\Big) =$$

$$= \Big(0,\ \frac{6}{7},\ -\frac{12}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{6}{7}\Big) \Rightarrow v_5 = (0,1,-2,-1,1)$$

$\mathrm{SPAN}\{v_5, v_4, v_3, v_2, v_1\} = \mathrm{SPAN}\{\hat{v}_5, \hat{v}_4, \hat{v}_3, \hat{v}_2, v_1\}$

$\langle v_5, v_4\rangle = -9+6+5-2 \qquad \langle v_5, v_3\rangle = 3-18+1+14=0$

$\langle v_5, v_2\rangle = 6-2+2-6=0 \qquad \langle v_5, v_1\rangle = 2-2=0$

BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^5$ $\quad \mathrm{SPAN}(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{SPAN}(v_1,\dots,\hat{v}_k) \quad k=1,\dots,5$

$v_1 = (1,0,-1,2,0)$

$v_2 = (5,6,1,-2,-6)$

$v_3 = (11,3,9,-1,14)$

$v_4 = (7,-9,-3,-5,-2)$

$v_5 = (0,1,-2,-1,1)$