Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 23 Luglio 2022

1. Consideriamo nello spazio il piano di equazione $x+2y-4z=5$, il punto $P=(0,1,1)$ e il punto $Q=(1,a,b)$.

   (a) Determinare il punto del piano più vicino a P.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo che il piano forma con la retta passante per l'origine ed il punto P.

   (c) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la mutua posizione del piano e della retta PQ.

2. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$p(x) \to p(2x+1).$$

   Determinare la forma canonica dell'applicazione, ed una base in cui la matrice associata all'applicazione assume tale forma canonica.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio il piano di equazione $x+2y-4z=5$, il punto $P=(0,1,1)$ e il punto $Q=(1,a,b)$.

   (a) Determinare il punto del piano più vicino a P.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo che il piano forma con la retta passante per l'origine ed il punto P.

   (c) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la mutua posizione del piano e della retta PQ.

(a) Retta per P e $\perp$ al piano $\quad (0,1,1)+t(1,2,-4)=(t,1+2t,1-4t)$

Intersezione retta / piano

$$t+2(1+2t)-4(1-4t)=5$$

$$t+2+4t-4+16t=5 \rightsquigarrow 21t=7 \rightsquigarrow t=\frac{1}{3}$$

Sostituendo nella retta troviamo il punto $\boxed{\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

(b) Direzione retta: $(0,1,1)$ $\quad$ Direzione $\perp$ al piano: $(1,2,-4)$

$$\cos\vartheta = \frac{\langle(0,1,1),(1,2,-4)\rangle}{\|(0,1,1)\|\cdot\|(1,2,-4)\|} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{21}} = -\frac{2}{\sqrt{42}}$$

angolo fra retta e $\perp$ al piano

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = \sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sqrt{1-\frac{4}{42}} = \boxed{\sqrt{\frac{19}{21}}}$$

angolo richiesto

(c) Retta PQ: $(0,1,1)+t(1,a-1,b-1)=(t,1+(a-1)t,1+(b-1)t)$

Intersezione retta / piano

$$t+2[1+(a-1)t]-4[1+(b-1)t]=5$$

$$t+2+2at-2t-4-4bt+4t=5 \rightsquigarrow (2a-4b+3)t=7$$

- Se $2a-4b+3=0 \rightsquigarrow$ 0 sol $\rightsquigarrow$ retta parallela al piano
- Se $2a-4b+3\neq 0 \rightsquigarrow$ 1 sol $\rightsquigarrow$ retta incidente al piano

Oss. La retta non può mai essere contenuta nel piano perché P non appartiene al piano.

2. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$p(x) \to p(2x+1).$$

Determinare la forma canonica dell'applicazione, ed una base in cui la matrice associata all'applicazione assume tale forma canonica.

Vediamo l'azione sulla base canonica

$$1 \to 1$$
$$x \to 2x+1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{array} & \end{array}$$
$$x^2 \to 4x^2+4x+1$$

Quella indicata è la matrice dell'applicazione usando in partenza ed arrivo la base canonica.
Essendo triangolare superiore, vediamo che gli autovalori sono 1, 2, 4, dunque è diagonalizzabile. Non resta che trovare una base di autovettori

$\boxed{\lambda=1}$ $\rightsquigarrow$ autovettore $\boxed{1}$ (già visto)

$\boxed{\lambda=2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow a=0,\ b=c=1$

$\rightsquigarrow$ autovettore $\boxed{x+1}$

$\boxed{\lambda=4}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow a=1,\ b=2,\ c=1$

$\rightsquigarrow$ autovettore $\boxed{x^2+2x+1}$

La base richiesta è $\boxed{\{1,\ x+1,\ x^2+2x+1\}}$

Verifiche utili: $x+1 \to 2x+2$, $\quad x^2+2x+1 \to 4x^2+8x+4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$