1. Consideriamo nello spazio i quattro punti punti

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (-1, 0, 1), \qquad C = (0, 0, 2), \qquad D = (1, -1, 0).$$

(a) Determinare la distanza del punto C dalla retta BD.

(b) Determinare il seno dell'angolo in A nel triangolo ABC.

(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per i punti A e B, e non interseca la retta CD.

(a) Retta BD: $(-1,0,1) + t(2,-1,-1) = (-1+2t, -t, 1-t)$

Piano per C e $\perp$ alla retta: $2x - y - z = -2$

Intersezione: $-2+4t+t-1+t = -2 \leadsto 6t = 1 \leadsto t = \frac{1}{6}$

$\leadsto$ punto $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = H$

Distanza $= \|C-H\| = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{36} + \frac{49}{36}\right)^{1/2} = \boxed{\frac{\sqrt{66}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}}$

(b) $B-A = (-2,-2,-2)$ $\qquad C-A = (-1,-2,-1)$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\langle B-A, C-A\rangle}{\|B-A\| \cdot \|C-A\|} = \frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\sin(\hat{A}) = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(c) Equazione parametrica

$$A + t(B-A) + s(C-D) = (1,2,3) + t(-2,-2,-2) + s(-1,1,2)$$

posso usare $(1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leadsto (1,-3,2)$$

$$\boxed{x - 3y + 2z = 1}$$

Verifica: $\to$ passa per A e B

$\to$ non interseca $(0,0,2) + t(-1,1,2) = (-t, t, 2+2t)$

$-t-3t+4+4t = 1$ 🙂

2. Consideriamo i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$V = \text{Span}\left((1,0,1,0),(1,2,3,4)\right), \qquad W = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = z,\ y = w\right\}.$$

(a) Determinare una base di $V + W$ e $V \cap W$.

(b) Determinare una base ortogonale di $W^\perp$ (dove gli ortogonali sono intesi rispetto al prodotto scalare canonico).

(a) Scriviamo W con Span. Si vede a occhio che

$W = \text{Span}\left((1,0,1,0),(0,1,0,1)\right)$

↑ in alternativa basta risolvere il sistema $\begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$

A questo punto

$$\boxed{\begin{aligned} V+W &= \text{Span}\left((1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,2,3,4)\right) \\ V \cap W &= \text{Span}\left((1,0,1,0)\right) \end{aligned}}$$

Occorre essere sicuri che $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ abbia rango 3, ma per questo basta controllare un minore 3×3

$\text{Det} = 2 \neq 0$

A questo punto siamo sicuri che $\dim(V+W) = 3$, quindi $\dim(V\cap W) = 1$, ma già sappiamo che $(1,0,1,0)$ vi appartiene, dunque è una base.

(b) Si vede a occhio che una base di $W^\perp$ è

$(1,0,-1,0)$ e $(0,1,0,-1)$

In alternativa si può risolvere il sistema ottenuto imponendo che (a,b,c,d) sia ortogonale ad una base di W, ad esempio $(1,0,1,0)$ e $(0,1,0,1)$.

3. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

(b) Determinare, al variare del parametro reale a, la forma di Jordan reale della matrice.

Polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-4a\right] = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3-4a)$$

Le radici sono $\lambda = 2$ e le radici di $\lambda^2-4\lambda+3-4a=0$. Il discriminante di questa equazione è $4-3+4a = 4a+1$

(a) Occorre distinguere 3 casi

→ Se $4a+1<0$, cioè $a<-\frac{1}{4}$, allora 2 autovalori non sono reali, quindi non è diagonalizzabile.

→ Se $4a+1>0$, cioè $a>-\frac{1}{4}$, allora gli autovalori sono reali e distinti (quelli che provengono dal pol. di 2° grado non possono essere uguali a 2 perché sono distinti e hanno somma 4), quindi la matrice è diagonalizzabile

→ Se $4a+1=0$, cioè $a=-\frac{1}{4}$, allora l'unico autovalore è $\lambda=2$, con molt. alg. $=3$ e molt. geom. $=$

$$\dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$ (3^a riga multipla della prima)

quindi non è diagonalizzabile

Conclusione: $\boxed{\text{diagonalizzabile se e solo se } a>-\frac{1}{4}}$

(b) Dall'analisi precedente

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{4a+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{4a+1} \end{pmatrix} \quad \lambda > -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda = -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{-4a-1} \\ 0 & \sqrt{-4a-1} & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda < -\frac{1}{4}}$$

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.

(a) Dimostrare che la formula

$$\langle p(x), q(x)\rangle = 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + 3p(-1)q(-1)$$

rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

(c) Determinare una base ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

(a) Simmetria e linearità nelle 2 variabili sono praticamente ovvi.
È definito positivo perché

$$\langle p(x), p(x)\rangle = 2p(0)^2 + p(1)^2 + 3p(-1)^2 \geq 0$$

e si può annullare solo se $p(0) = p(1) = p(-1) = 0$, ma un polinomio di grado 2 si annulla in 3 punti solo se è il polinomio nullo.

(b) $\langle 1, 1\rangle = 6$ $\quad \langle x, x\rangle = 4$ $\quad \langle x^2, x^2\rangle = 4$

$\langle 1, x\rangle = 0+1-3 = -2$ $\quad \langle 1, x^2\rangle = 0+1+3 = 4$

$\langle x, x^2\rangle = 0+1-3 = -2$

$$\text{Matrice} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Ortogonalizziamo $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$ con GS

$w_1 = v_1 = \boxed{1}$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = x - \frac{-2}{6}\cdot 1 = \boxed{x + \frac{1}{3}}$$

← verificare che è $\perp$ a w_1

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= x^2 - \frac{4}{6}\cdot 1 - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \frac{2}{3} + \frac{x}{5} + \frac{1}{15} = \boxed{x^2 + \frac{x}{5} - \frac{3}{5}}$$

↑ verificare che è $\perp$ a w_1 e w_2

$$\langle v_3, w_2\rangle = 0 + 1\cdot\frac{4}{3} + 3\cdot 1\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$