Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 2 Luglio 2022

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti punti

$$A = (1,2,3), \qquad B = (-1,0,1), \qquad C = (0,0,2), \qquad D = (1,-1,0).$$

   (a) Determinare la distanza del punto C dalla retta BD.

   (b) Determinare il seno dell'angolo in A nel triangolo ABC.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per i punti A e B, e non interseca la retta CD.

2. Consideriamo i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$V = \operatorname{Span}\big((1,0,1,0),(1,2,3,4)\big), \qquad W = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = z,\ y = w\big\}.$$

   (a) Determinare una base di $V + W$ e $V \cap W$.

   (b) Determinare una base ortogonale di $W^{\perp}$ (dove gli ortogonali sono intesi rispetto al prodotto scalare canonico).

3. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

   (b) Determinare, al variare del parametro reale a, la forma di Jordan reale della matrice.

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.

   (a) Dimostrare che la formula

$$\langle p(x), q(x)\rangle = 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + 3p(-1)q(-1)$$

   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

   (b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

   (c) Determinare una base ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.