1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (2,1,0), \qquad B = (0,2,3), \qquad C = (1,1,1), \qquad D = (1,-1,0).$$

(a) Determinare il punto del piano passante per A, B, C più vicino a D.

(b) Determinare il volume del tetraedro con vertici nei quattro punti.

(c) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per i punti B, C, D.

(a) $B-A = (-2,1,3)$ $\quad$ $C-A = (-1,0,1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,-1,1) \leftarrow \text{vettore} \perp \text{piano}$$

$\rightsquigarrow \boxed{x-y+z=1}$ equazione piano per A,B,C

Retta per D e $\perp$ al piano: $(1,-1,0)+t(1,-1,1) = (1+t,-1-t,t)$

Intersezione $\quad 1+t+1+t+t=1 \rightsquigarrow 3t=-1 \rightsquigarrow t=-\frac{1}{3}$

Punto richiesto: $\boxed{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$

(b) $D-A = (-1,-2,0)$

$$\begin{array}{c} D-A \\ B-A \\ C-A \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = -1+6-4 = 1$

Vol tetraedro $= \frac{1}{6}|\text{Det}| = \boxed{\frac{1}{6}}$

(c) $B-A = (-2,1,3) \leftarrow$ Direzione retta AB

$B-C = (-1,1,2)$

$C-D = (0,2,1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3,1,-2)$$

$\uparrow$ Direzione $\perp$ al piano per B,C,D

$$\cos\alpha = \frac{\langle (-2,1,3),(-3,1,-2)\rangle}{\|(-2,1,3)\|\cdot\|(-3,1,-2)\|} = \frac{1}{14}$$

$\uparrow$ angolo fra retta AB e $\perp$ al piano

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{196}} = \boxed{\frac{\sqrt{195}}{14}}$$

$\uparrow$ angolo fra retta AB e piano

2. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

(a) rappresenta un'applicazione lineare surgettiva,

(b) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,

(c) ammette $(1, 1, 1)$ come autovettore.

(a) Surgettiva $\iff$ Det $\neq 0$ $\iff$ $2a + 2 + 9 - 6 - 6a - 1 \neq 0$

$\iff -4a \neq -4 \iff \boxed{a \neq 1}$

Verifica: per $a=1$ la 3ª riga è $\frac{1}{4}$ della somma delle altre 2.

(b) $\lambda = 1$ è autovalore di A $\iff$ Det$(A - Id) = 0$ $\iff$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2 + 9 - 3 - 6(a-1) = 0$$

$\iff -6a = -14$

$\iff \boxed{a = \frac{7}{3}}$

(c) $(1,1,1)$ è autovettore $\iff$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6 = \lambda & \rightsquigarrow \lambda = 6 \\ 6 = \lambda & \\ 2 + a = \lambda & \rightsquigarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

— o — o —

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 4xy + y^2 + bz^2.$$

(a) Determinare la segnatura al variare del parametro reale b.

(b) Nel caso $b = -1$ determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica è definita negativa.

(c) Sia V il sottospazio generato dei vettori $(1, 2, 3)$ e $(1, 0, 1)$. Determinare per quali valori del parametro reale b la restrizione della forma quadratica a V è definita positiva.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ Sylvester 2−1−3

Det 1x1 = 1

Det 2x2 = −4

Det 3x3 = −4b

Se $b>0$: $+ + - -$ P V P $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{segnatura } + + - \quad b>0}$

Se $b<0$: $+ + - +$ $\rightsquigarrow$ segnatura $+ - -$ $\quad b<0$

Se $b=0$: + e − ci sono $\rightsquigarrow$ segnatura $0 + -$ $\quad b=0$

(b) $q(x,y,z) = 4xy + y^2 - z^2 = 4xy + y^2 + 4x^2 - 4x^2 - z^2$

$= (2x+y)^2 - (2x)^2 - z^2$

Quindi è definita negativa, ad esempio, sul sottospazio di equazione $\boxed{2x+y=0}$. Volendo si può scrivere come

Span $((0,0,1),(1,-2,0))$.

(c) $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2,2,-2) \rightsquigarrow \boxed{x+y-z=0}$

equazione cartesiana sottospazio

$x = z - y \rightsquigarrow 4xy + y^2 + bz^2 = 4zy - 4y^2 + y^2 + bz^2$

$= -3y^2 + bz^2 + 4zy$

$\boxed{\text{Non è mai definita positiva su } V}$

In alternativa: calcolo $q(1,2,3)$, $q(1,0,1)$, e il "prodotto scalare" tra $(1,2,3)$ e $(1,0,1)$ e studio la segnatura della matrice che ottengo.

— o — o —

4. Nel piano cartesiano, sia R_1 la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(-2, 1)$, e sia R_2 la rotazione di $90°$ in senso antiorario intorno all'origine.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ mediante R_1.

   (b) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene applicando prima R_1 e poi R_2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

ANTIORARIA ORARIA

(a) Scriviamo l'espressione generale di R_1

$$(x,y) \rightsquigarrow (x+2, y-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ (aggiungo $(-2,1)$) $\boxed{(y-3, -x-1)}$ (verifico almeno che $(-2,1)$ resti fisso)

Retta $(t, 2t)$. La sua immagine è

$$(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{2t-3}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{-t-1}}) \qquad 2t-3 = x \rightsquigarrow t = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\rightsquigarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$

$\boxed{2y + x + 5 = 0}$ (verifica: fare un disegno e controllare che abbia senso)

(b) $R_1 = A^{-1}(P - \underset{\uparrow\,(-2,1)}{P_0}) + P_0$ $\qquad R_2 = AP$

$$R_2(R_1(P)) = A(A^{-1}(P-P_0) + P_0) = P - P_0 + AP_0$$

$$AP_0 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{La composizione è la traslazione } (x,y) \to (x+1, y-3)}$

(controllare che abbia senso, ad esempio calcolando l'immagine di $(-2,1)$ e $(0,0)$).