Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

# Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 11 Giugno 2022

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (2,1,0), \qquad B = (0,2,3), \qquad C = (1,1,1), \qquad D = (1,-1,0).$$

   (a) Determinare il punto del piano passante per $A$, $B$, $C$ più vicino a $D$.

   (b) Determinare il volume del tetraedro con vertici nei quattro punti.

   (c) Determinare il coseno dell'angolo che la retta $AB$ forma con il piano passante per i punti $B$, $C$, $D$.

2. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   Determinare per quali valori del parametro reale $a$ la matrice

   (a) rappresenta un'applicazione lineare surgettiva,

   (b) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,

   (c) ammette $(1,1,1)$ come autovettore.

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x,y,z) = 4xy + y^2 + bz^2.$$

   (a) Determinare la segnatura al variare del parametro reale $b$.

   (b) Nel caso $b = -1$ determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica è definita negativa.

   (c) Sia $V$ il sottospazio generato dei vettori $(1,2,3)$ e $(1,0,1)$. Determinare per quali valori del parametro reale $b$ la restrizione della forma quadratica a $V$ è definita positiva.

4. Nel piano cartesiano, sia $R_1$ la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(-2,1)$, e sia $R_2$ la rotazione di $90°$ in senso antiorario intorno all'origine.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ mediante $R_1$.

   (b) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene applicando prima $R_1$ e poi $R_2$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.