1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (2, 3, 1), \qquad B = (-1, 0, 3), \qquad C = (1, -1, 0).$$

(a) Determinare il seno dell'angolo in B, precisando se si tratta di un angolo acuto o ottuso.

(b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B.

(c) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B e C.

(a) $A-B = (3,3,-2) \qquad C-B = (2,-1,-3)$

$$\cos(\hat{ABC}) = \frac{\langle (3,3,-2), (2,-1,-3) \rangle}{\|(3,3,-2)\| \cdot \|(2,-1,-3)\|} = \frac{9}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{308}} > 0 \quad \boxed{\text{ACUTO}}$$

$$\sin = \sqrt{1-\cos^2} = \sqrt{1-\frac{81}{308}} = \boxed{\sqrt{\frac{227}{308}}}$$

(b) Retta AC: $(1,-1,0) + t(1,4,1) = (1+t, -1+4t, t)$

Piano per B e $\perp$ alla retta: $\quad x+4y+z = 2$

Intersezione: $\quad 1+t-4+16t+t = 2 \rightsquigarrow 18t = 5 \rightsquigarrow t = \frac{5}{18}$

$\rightsquigarrow$ Piede altezza $= \boxed{\left(\frac{23}{18}, \frac{1}{9}, \frac{5}{18}\right)}$

(c) Piano per A, B, C

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{matrix} \rightsquigarrow (-11, 5, -9) \rightsquigarrow -11x+5y-9z = -16$$

Retta per l'origine $\perp$ al piano: $\quad (-11t, 5t, -9t)$

Intersezione:

$$121t + 25t + 81t = -16 \rightsquigarrow 227t = -16 \rightsquigarrow t = -\frac{16}{227}$$

Sostituendo t: $\boxed{\left(\frac{176}{227}, \frac{-80}{227}, \frac{144}{227}\right)}$

2. Consideriamo, nello spazio, la retta r passante per i punti $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 0)$, ed il piano π di equazione $ax + 2y - 3z = b$.

   (a) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la posizione relativa della retta r e del piano π.

   (b) Determinare la simmetrica della retta r rispetto al piano $x = 3$.

(a) retta: $(1,0,1) + t(-1,1,1) = (1-t, t, 1+t)$

Intersezione:

$$a - at + 2t - 3 - 3t = b \rightsquigarrow -(a+1)t = b+3-a$$

→ $a \neq -1$, b qualunque ⇝ sol unica ⇝ incidenti
→ $a = -1$, $b = -4$ ⇝ ∞ sol ⇝ retta contenuta nel piano
→ $a = -1$, $b \neq -4$ ⇝ 0 sol. ⇝ retta parallela al piano

(b) Simmetria rispetto al piano $x = 3$:

$$\boxed{(x, y, z) \longrightarrow (6-x, y, z)}$$

I simmetrici dei due punti sono $(5,0,1)$ e $(4,-1,0)$

La retta simmetrica è

$$\boxed{(5,0,1) + t(1,1,1)}$$

L'espressione della simmetria si ottiene volendo dalla catena

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-3, y, z) \rightsquigarrow (3-x, y, z) \rightsquigarrow (6-x, y, z)$

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetria risp. a $x=0$ $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

$P_0 = (3,0,0)$

3. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.

(b) Determinare autovalori e autospazi di f.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix}$$

La matrice di f rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Triangolare

$\downarrow$

Det $= 9 \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva e surgettiva.

Pol. caratteristico $(\lambda-3)^2(\lambda-1)^2$ (sempre per matrice triangolare)

Autovalori: 3 e 1, entrambi con molt. alg. $=2$. Vediamo le geometriche.

$$B - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ker = \operatorname{Span}\{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

$$B - 3Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ker = \operatorname{Span}\{(0,1,0,0),\ (0,0,0,1)\}$$

Conclusione

$\lambda = 1$ Autospazio $= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda = 3$ Autospazio $= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy - 2yz.$$

(a) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita positiva.

(b) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita negativa.

$$y^2 - z^2 + 2xy - 2yz = \underbrace{y^2} + \underbrace{2xy} - \underbrace{2yz} + \underbrace{x^2} - x^2 + \underbrace{z^2} - z^2 + 2xz \underbrace{- 2xz} - z^2$$

$$= (x+y-z)^2 - x^2 + 2xz - 2z^2$$

$$= (x+y-z)^2 - (x-z)^2 - z^2$$

$\rightsquigarrow$ segnatura $= \boxed{+ - -}$

(a) $\begin{cases} x - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Span}\{(0,1,0)\}}$

(b) $x + y - z = 0$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Span}\{(1,0,1), (0,1,1)\}}$

— o — o —

Ci sono ovviamente tante alternative, ad esempio

$$y^2 - z^2 + 2xy - 2yz = 2y^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 2xy$$

$$= -(y+z)^2 + 2y^2 + 2xy + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$= -(y+z)^2 + \left(\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$$

da cui poi si può procedere come sopra.

— o — o —