

# Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 26 Febbraio 2022

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (2, 3, 1), \quad B = (-1, 0, 3), \quad C = (1, -1, 0).$$

- (a) Determinare il seno dell'angolo in  $B$ , precisando se si tratta di un angolo acuto o ottuso.  
(b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice  $B$ .  
(c) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
2. Consideriamo, nello spazio, la retta  $r$  passante per i punti  $(1, 0, 1)$  e  $(2, -1, 0)$ , ed il piano  $\pi$  di equazione  $ax + 2y - 3z = b$ .
- (a) Determinare, al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ , la posizione relativa della retta  $r$  e del piano  $\pi$ .  
(b) Determinare la simmetrica della retta  $r$  rispetto al piano  $x = 3$ .
3. Sia  $M_{2 \times 2}$  lo spazio delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali, e sia  $f : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$  l'applicazione lineare definita da

$$A \rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare se  $f$  è iniettiva e/o surgettiva.  
(b) Determinare autovalori e autospazi di  $f$ .
4. Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy - 2yz.$$

- (a) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita positiva.  
(b) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita negativa.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.