

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 26 Febbraio 2022

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (2, 3, 1), \quad B = (-1, 0, 3), \quad C = (1, -1, 0).$$

- (a) Determinare il seno dell'angolo in B , precisando se si tratta di un angolo acuto o ottuso.
 - (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B .
 - (c) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A , B e C .
2. Consideriamo, nello spazio, la retta r passante per i punti $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 0)$, ed il piano π di equazione $ax + 2y - 3z = b$.
- (a) Determinare, al variare dei parametri reali a e b , la posizione relativa della retta r e del piano π .
 - (b) Determinare la simmetrica della retta r rispetto al piano $x = 3$.
3. Sia $M_{2 \times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.
 - (b) Determinare autovalori e autospazi di f .
4. Consideriamo in \mathbb{R}^3 la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy - 2yz.$$

- (a) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita positiva.
- (b) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita negativa.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.