Geometria nello spazio 2

Argomenti: Sfere nello spazio **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: Uso dei vettori nello spazio, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$

---

1. Determinare l'equazione della sfera con centro nel punto (x_0, y_0, z_0) e raggio $R > 0$.

2. Determinare sotto quali condizioni l'equazione
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
rappresenta una sfera. In tal caso determinare centro e raggio in funzione di a, b, c, d.

3. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 4, -4)$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.
   - Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.

4. Sia S la sfera con centro in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, diverso da P_0.

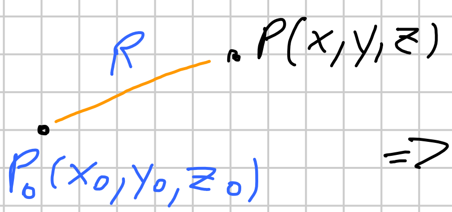
   Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto P_1.

5. Per ciascuna delle condizioni assegnate, determinare l'equazione della sfera che la soddisfa (o eventualmente delle sfere che la soddisfano).
   (a) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per l'origine.
   (b) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per $(2, -1, 4)$.
   (c) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente al piano di equazione $x + y - 2z + 3 = 0$.
   (d) Passa per $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 3)$.
   (e) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente alla retta passante per $(1, 1, 1)$ e $(0, -1, 2)$.
   (f) Ha raggio 6 ed è tangente nel punto $(1, 2, 3)$ al piano di equazione $x - 2y + 2z = 3$.
   (g) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente esternamente alla sfera di equazione
   $$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0.$$
   (h) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$ le è tangente internamente.
   (i) Ha centro sulla retta passante per $(1, 0, -1)$ e $(1, 2, 3)$ ed è tangente ai piani di equazione $x + y + 2z = 3$ e $x + y + 2z = 4$.

6. Determinare l'equazione del cono con vertice in $(2, 0, 4)$ e tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$.

SOLUZIONI ? REV. 02
BY GIMUSI 13/01/15

1. Determinare l'equazione della sfera con centro nel punto (x_0, y_0, z_0) e raggio $R > 0$.



$d^2(P,C) = |P-P_0|^2 = R^2$

$\Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

2. Determinare sotto quali condizioni l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta una sfera. In tal caso determinare centro e raggio in funzione di a, b, c, d.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$ ≡ SFERA CON CENTRO IN (x_0, y_0, z_0) E RAGGIO R

$\leadsto x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2+z^2-2z_0z+z_0^2-R^2=0$

$\leadsto x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2x_0 \quad b=-2y_0 \quad c=-2z_0 \\ d = x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2 \end{cases}$$

3. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 4, -4)$.

(a) • Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.

(b) • Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.

(c) • Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.

(a) $|P-A| = |P-B| \iff |P-A|^2 = |P-B|^2$

$\leadsto \cancel{(x-1)^2}+(y-2)^2+(z-3)^2 = \cancel{(x-1)^2}+(y-4)^2+(z+4)^2$

$\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-6z+9 = \cancel{y^2}-8y+16+\cancel{z^2}+8z+16$

$4y-14z-19=0$ ≡ PIANO

MODO 2 $\quad n = (B-A) = (0,2,-7) \leadsto \pi: 2y-7z+d=0$

$M = \frac{A+B}{2} = (1,3,-\frac{1}{2}) \in \pi \leadsto 6+\frac{7}{2}+d=0 \quad d = \frac{19}{2}$

$2y-7z+\frac{19}{2}=0 \leadsto 4y-14z-19=0$

(b) $|P-A| = 3|P-B| \iff |P-A|^2 = 9|P-B|^2$

$$\rightsquigarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 9\left[(x-1)^2+(y-4)^2+(z+4)^2\right]$$

$$8x^2-16x+8+9y^2-72y+144+9z^2+72z+144-y^2+4y-4-z^2+6z-9=0$$

$$8x^2+8y^2+8z^2-16x-68y+78z+283=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-\frac{17}{2}y+\frac{39}{4}z+\frac{283}{8}=0 \equiv \text{SFERA}\begin{cases}\text{CENTRO } (x_0,y_0,z_0)\\ \text{RAGGIO } R\end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Vd. Es. 3 $\Rightarrow \begin{cases} a=-2x_0 \quad b=-2y_0 \quad c=-2z_0 \\ d = x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1\\ y_0=\frac{17}{4}\\ z_0 = -\frac{39}{8}\end{cases}$

$$\rightsquigarrow R^2 = 1+\frac{289}{16}+\frac{1521}{64}-\frac{283}{8} = \frac{64+1156+1521-2264}{64} = \frac{477}{64} \rightsquigarrow R = \frac{3\sqrt{53}}{8}$$

(c) $|P-A| = \lambda|P-B| \iff |P-A|^2 = \lambda^2|P-B|^2$

$$\rightsquigarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = \lambda^2\left[(x-1)^2+(y-4)^2+(z+4)^2\right]$$

$$\lambda^2x^2-2\lambda^2x+\lambda^2-x^2+2x-1+\lambda^2y^2-8\lambda^2y+16\lambda^2-y^2+4y-4+\lambda^2z^2+8\lambda^2z+16\lambda^2-z^2+6z-9=0$$

$$(\lambda^2-1)(x^2+y^2+z^2)+(2-2\lambda^2)x+(4-8\lambda^2)y+(6+8\lambda^2)z+(33\lambda^2-14)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-\left(\frac{8\lambda^2-4}{\lambda^2-1}\right)y+\frac{(8\lambda^2+6)}{(\lambda^2-1)}z+\frac{(33\lambda^2-14)}{(\lambda^2-1)}=0 \equiv \text{SFERA}\begin{cases} C(x_0,y_0,z_0)\\ R\end{cases}$$

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{8\lambda^2-4}{\lambda^2-1}\right) \qquad z_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{8\lambda^2+6}{\lambda^2-1}\right)$$

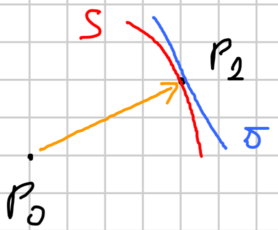
$$R^2 = 1+\frac{1}{4}\left(\frac{8\lambda^2-4}{\lambda^2-1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{8\lambda^2+6}{\lambda^2-1}\right)^2-\frac{(33\lambda^2-14)}{(\lambda^2-1)} = \frac{4(\lambda^2-1)^2+(8\lambda^2-4)^2+(8\lambda^2+6)^2-4(33\lambda^2-14)(\lambda^2-1)}{4(\lambda^2-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4(\lambda^2-1)^2}\left(\cancel{4\lambda^4}-8\lambda^2+4+\cancel{64\lambda^4}-64\lambda^2+16+\cancel{64\lambda^4}+96\lambda^2+36-\cancel{132\lambda^4}+132\lambda^2+56\lambda^2-56\right) =$$

$$= \frac{1}{4(\lambda^2-1)^2}(212\lambda^2) = \frac{53\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} \rightsquigarrow R = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}\sqrt{53}$$

4. Sia S la sfera con centro in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, diverso da P_0.

Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto P_1.



$$n \equiv (P_1 - P_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\sigma : (x_1 - x_0)x + (y_1 - x_0)y + (z_1 - z_0)z + d = 0$$

$$P_1 \in \sigma \rightsquigarrow d = (x_1 x_0 + y_1 y_0 + z_1 z_0) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

5. Per ciascuna delle condizioni assegnate, determinare l'equazione della sfera che la soddisfa (o eventualmente delle sfere che la soddisfano).

(a) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per l'origine.

(b) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per $(2, -1, 4)$.

(c) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente al piano di equazione $x + y - 2z + 3 = 0$.

(d) Passa per $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 3)$.

(e) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente alla retta passante per $(1, 1, 1)$ e $(0, -1, 2)$.

(f) Ha raggio 6 ed è tangente nel punto $(1, 2, 3)$ al piano di equazione $x - 2y + 2z = 3$.

(g) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente esternamente alla sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0.$$

(h) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$ le è tangente internamente.

(i) Ha centro sulla retta passante per $(1, 0, -1)$ e $(1, 2, 3)$ ed è tangente ai piani di equazione $x + y + 2z = 3$ e $x + y + 2z = 4$.

(a) $R^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \rightsquigarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = R^2 = 14$

$\rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

(b) $R^2 = 1 + 9 + 1 = 11 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 3 = 0$

(c) $R = \dfrac{|1 + 2 - 6 + 3|}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow (1,2,3) \in \sigma$ $(1 + 2 - 6 + 3 = 0)$

(d) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

$(1,1,0) \rightsquigarrow 1 + 1 + a + b + d = 0$

$(0,1,1) \rightsquigarrow 1 + 1 + b + c + d = 0$

$(1,0,1) \rightsquigarrow 1 + 1 + a + c + d = 0$

$(2,-1,3) \rightsquigarrow 4 + 1 + 9 + 2a - b + 3c + d = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a + b + d = -2 \\ b + c + d = -2 \\ a + c + d = -2 \\ 2a - b + 3c + d = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -2 - a - b = -2 - 2a \\ c = \cancel{-2} \cancel{- a} \cancel{+2} \cancel{+ a} + b = a \\ 2b \cancel{-2} - a - b = \cancel{-2} \quad b = a \\ \cancel{2a} - a + 3a - 2 \cancel{-2a} = -14 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -2 + 12 = 10 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 \\ c = -6 = -2z_0 \\ b = -6 = -2y_0 \\ a = -6 = -2x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 3 \\ R^2 = 3 \cdot 3^2 - 10 = 17 \end{cases} \rightsquigarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 17$$

$(1,1,0) \rightsquigarrow 4 + 4 + 9 = 17 \quad (2,-1,3) \rightsquigarrow 1 + 16 + 0 = 17$

(e) CENTRO $(1,2,3)$ "r" TANG. PER $(1,1,1)$, $(0,-1,2)$

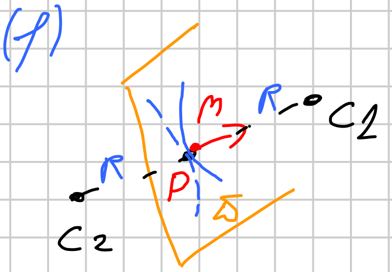
$P \in r: \ v = (1,2,-1) \rightsquigarrow (1+\delta, 1+2\delta, 1-\delta)$

$CP = (\delta, 2\delta - 1, -\delta - 2) \quad CP \perp v \rightsquigarrow \delta + 4\delta - 2 + \delta + 2 = 0 \Rightarrow \delta = 0$

$CP = (0,-1,-2) \rightsquigarrow R^2 = \|CP\|^2 = 5$

$\rightsquigarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

(f)

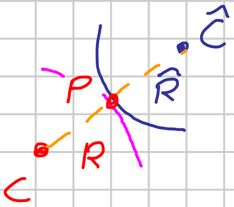


$R = 6 \quad \pi: x - 2y + 2z = 3 \rightsquigarrow n = (1,-2,2) \quad P = (1,2,3)$

$$\begin{cases} C_1 = P + \frac{n}{\|n\|} R = (1,2,3) + 6\,\frac{(1,-2,2)}{3} = (3,-2,7) \\ C_2 = P - \frac{n}{\|n\|} R = (1,2,3) - 6\,\frac{(1,-2,2)}{3} = (-1,6,-1) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 36 \\ (x+1)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 36 \end{cases}$$

(g) CENTRO $C = (1,2,3)$ SFERA TG.: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$



$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Vd. Es. 3 $\Rightarrow \begin{cases} a = -2x_0 \quad b = -2y_0 \quad c = -2z_0 \\ d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 \end{cases}$

$x_0 = -1, \ y_0 = 2, \ z_0 = -2 \rightsquigarrow \hat{C} = (-1,2,-2) \qquad \hat{R}^2 = 9 - 5 = 4$

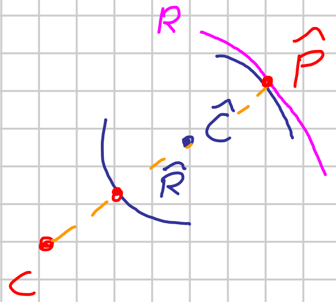
$\hat{C}C = (2,0,5) \rightsquigarrow P = \hat{C} + \frac{\hat{C}C}{\|\hat{C}C\|}\hat{R} = (-1,2,-2) + \frac{2}{\sqrt{29}}(2,0,5)$

$$P = \left(-1 + \frac{4}{\sqrt{29}}, 2, -2 + \frac{10}{\sqrt{29}}\right) \rightsquigarrow CP = \left(-2 + \frac{4}{\sqrt{29}}, 0, -5 + \frac{10}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\rightsquigarrow R^2 = \|CP\|^2 = 4 + \frac{16}{29} - \frac{16}{\sqrt{29}} + 25 + \frac{100}{29} - \frac{100}{\sqrt{29}} = 29 + \cancel{\frac{116}{29}}^{\,4} - \frac{116}{\sqrt{29}}$$

$$= 33 - 4\sqrt{29} \rightsquigarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 33 - 4\sqrt{29}$$

(b)



$$\hat{P} = \hat{C} - \frac{\hat{C}C}{\|\hat{C}C\|}\hat{R} = (-1, 2, -2) - \frac{2}{\sqrt{29}}(2, 0, 5) =$$

$$= \left(-1 - \frac{4}{\sqrt{29}}, 2, -2 - \frac{10}{\sqrt{29}}\right) \rightsquigarrow C\hat{P} = \left(-2 - \frac{4}{\sqrt{29}}, 0, -5 - \frac{10}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\rightsquigarrow R^2 = \|C\hat{P}\|^2 = 4 + \frac{16}{29} + \frac{16}{\sqrt{29}} + 25 + \frac{100}{29} + \frac{100}{\sqrt{29}} = 33 + 4\sqrt{29}$$

$$\rightsquigarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 33 + 4\sqrt{29}$$

OSS $|\hat{P} - P| = \Delta R = \sqrt{33 + 4\sqrt{29}} - \sqrt{33 - 4\sqrt{29}} = 2\sqrt{\frac{33 - \sqrt{33^2 - 16 \cdot 29}}{2}} = 2\sqrt{\frac{33 - 25}{2}} = 4 = 2\hat{R}$

(c) CENTRO $C \in r$: $(1, 0, -1), (1, 2, 3)$ $\sigma_1: x + y + 2z = 3$ $\sigma_2: x + y + 2z = 4$

$$\begin{cases} \sigma_1 \parallel \sigma_2 \rightsquigarrow C \in \sigma_3: x + y + 2z = 7/2 \\ r: (1, 0, -1) + \delta(0, 2, 4) = (1, 2\delta, -1 + 4\delta) \end{cases} \rightsquigarrow 1 + 2\delta - 2 + 8\delta = 7/2$$

$$10\delta = \frac{7}{2} + 1 = \frac{\cancel{5}\,9}{2} \qquad \delta = \cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{9}{20}$$

$$\rightsquigarrow C = \left(1, \cancel{\tfrac{1}{2}}^{\,9/10}, \cancel{0}^{\,4/5}\right) \qquad R = \frac{1}{2}\,\mathrm{DIST}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

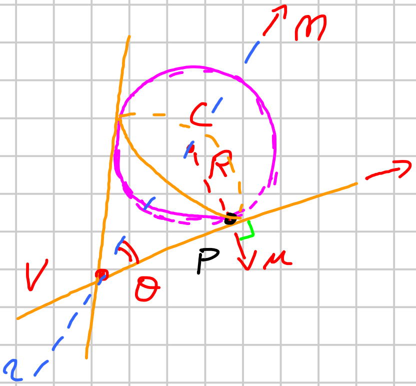
$$\rightsquigarrow (x-1)^2 + \left(y - \cancel{\tfrac{1}{2}}^{\,9/10}\right)^2 + \cancel{z^2} = \frac{1}{24}$$

$$(z - 4/5)^2$$

6. Determinare l'equazione del cono con vertice in $(2,0,4)$ e tangente alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+5=0$.

vol. Es. (58)

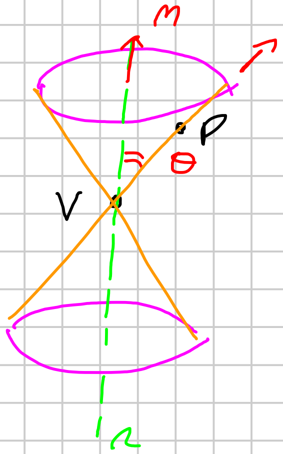
$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+5=0 \rightsquigarrow C=(-1,2,-2) \quad R^2=9-5=4$$



$$C-V=(-3,2,-6) \quad \overline{CV}^2=\|C-V\|^2=49 \quad \overline{CV}=7$$

$$\sin\theta=\frac{R}{\overline{CV}}=\frac{2}{7} \rightsquigarrow \cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\rightsquigarrow \text{CONO: } \frac{\langle P-V,n\rangle}{\|P-P_0\|\cdot\|n\|}=\cos\theta$$



$$P-V=(x-2,\ y,\ z-4)$$

$$n:\ (-3,2,-6)$$

$$\rightsquigarrow \langle P-V,n\rangle^2=\cos^2\theta\ \|P-P_0\|^2\cdot\|n\|^2$$

$$\rightsquigarrow \left[-3(x-2)+2y-6(z-4)\right]^2=\frac{45}{\cancel{49}}\left[(x-2)^2+y^2+(z-4)^2\right]\cdot\cancel{49}$$

$$36(x-2)^2+41y^2+9(z-4)^2+12y(x-2)-36(x-2)(z-4)+24y(z-4)=0$$

$$36x^2-\cancel{144x}+\cancel{144}+41y^2+9z^2-\cancel{72z}+\cancel{144}+12xy-24y-36xz+\cancel{144x}+\cancel{72z}-\cancel{288}+$$
$$+24yz-96y=0 \rightsquigarrow 36x^2+41y^2+9z^2+12xy-36xz+24yz-120y=0$$

VER. $\begin{cases} \in(2,0,4) \rightsquigarrow 144+144-288=0 \\ y=0 \quad z=1 \rightsquigarrow 36x^2-36x+9=0 \quad 4x^2-4x+1=0 \quad (2x-1)^2=0 \quad x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\rightsquigarrow P=\left(\frac{1}{2},0,1\right) \quad P-V=\left(-\frac{3}{2},0,-3\right) \quad \|P-V\|=\sqrt{\frac{9}{4}+9}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\langle P-V,n\rangle}{\|P-V\|\,\|n\|}=\frac{\frac{9}{2}+18}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot 7}=\frac{\overset{15}{\cancel{45}}}{\underset{7}{\cancel{21}}\sqrt{5}}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{7}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{7}=\cos\theta$$