1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1,2,3), \qquad B = (1,0,1), \qquad C = (2,1,0), \qquad D = (-1,1,1).$$

(a) Determinare la distanza tra il punto A e il piano passante per B, C e D.

(b) Determinare la distanza tra il punto D e la retta passante per A e B.

(c) Determinare la distanza tra la retta passante per A e B e la retta passante per C e D.

(a) Parametrica del piano : $B + t(C-B) + s(D-B)$

$= (1,0,1) + t(1,1,-1) + s(-2,1,0)$

Vettore $\perp$ a $(1,1,-1)$ e $(-2,1,0)$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow (1,2,3) \qquad \boxed{x+2y+3z-4=0}$$

Piano per B, C, D in cartesiana

$$\text{Dist}(A, \text{piano}) = \frac{|1+4+9-4|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \boxed{\frac{5}{7}\sqrt{14}}$$

(b) Retta AB : $B + t(A-B) = (1,0,1) + t(0,2,2) = (1, 2t, 1+2t)$

Piano per D e $\perp$ alla retta $\quad 2y+2z = 4 \rightsquigarrow y+z=2$

Intersezione piano / retta : $\quad 2t+1+2t = 2 \rightsquigarrow 4t=1 \rightsquigarrow t=\frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = H \qquad$ [Verificare che $\langle A-B, D-H\rangle = 0$!!]

$$\text{Distanza}(D, \text{retta}) = \text{Dist}\left((-1,1,1), (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})\right)$$

$$= \left\{ 4 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ 4 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

(c) retta CD : $C + t(D-C) = (2,1,0) + t(-3,0,1)$

Piano che contiene CD e // ad AB : $(2,1,0) + t(-3,0,1) + s(0,2,2)$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \rightsquigarrow (-2,6,-6) \qquad \boxed{x-3y+3z+1=0}$$

Cartesiana del piano

$$\text{Dist}(AB, CD) = \text{Dist}(B, \text{piano}) = \frac{|1+3+1|}{\sqrt{1+9+9}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{19}}}$$

Oss. Ci sono varie alternative più complicate per i punti (a), (b), (c)

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z, w))

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= a, \\ y+2z &= 2, \\ x-z+bw &= 5. \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori di a e b l'insieme delle soluzioni del sistema ha dimensione massima, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & b & 5 \end{array}\right)$$

A = matrice dei coeff.

B = matrice completa

(a) Se rango $(A) = 3$, allora di sicuro Rango (A) = Rango (B), per cui ci sono soluzioni. Quindi deve essere Rango $(A) = 2$ (meno non può essere).

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{matrix} \rightsquigarrow \text{Det} = b-1$$

↗ se $b \neq 1$, allora Rango $(A) = 3$

↘ se $b = 1$, si vede che la terza riga è la differenza delle prime 2, quindi Rango $(A) = 2$

↑ oss. decisiva

$R_1 - R_2 = R_3$

Se $a - 2 = 5$, cioè $a = 7$, allora ci sono soluzioni, altrimenti NO.

Quindi nessuna soluzione se e solo se $\boxed{b=1 \text{ e } a \neq 7}$

(b) Affinché lo spazio delle soluzioni abbia dim. max deve essere

Rango (A) = Rango $(B) = 2$ cioè $\boxed{b=1 \text{ e } a=7}$

In questo caso risolviamo con Gauss (bastano le prime 2 equazioni)

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 7 \\ y+2z \quad &= 2 \end{aligned}$$

z, w ↑ libere

$z = t$, $w = s$, $y = 2-2z = 2-2t$

$x = 7-y-z-w = 7-2+2t-t-s = 5+t-s$

$$\boxed{\begin{aligned} (x,y,z,w) &= (5+t-s,\, 2-2t,\, t,\, s) \\ &= (5,2,0,0) + t(1,-2,1,0) + s(-1,0,0,1) \end{aligned}}$$

↑ soluz. sist. NON omogeneo

↑ soluz. sist. omogeneo ↑

Alternativa ancora più semplice: lavorare alla Gauss il sistema iniziale.

3. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare del parametro reale a, una base del Ker della matrice.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

(c) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, ed in tali casi determinare una possibile matrice ortogonale che la diagonalizza.

(a) $\operatorname{Det} A = -2a$ $\rightarrow$ se $a \neq 0$, allora $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

$\rightarrow$ se $a = 0$, allora $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e si vede ad occhio che $\operatorname{ker} A = \operatorname{Span}(1,0)$

(b) Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda - 2a = 0$, da cui $\Delta = 9 + 8a$ Quindi

$\rightarrow$ se $\Delta < 0$, cioè $a < -\frac{9}{8}$ allora gli autovalori non sono reali

$\rightarrow$ se $\Delta > 0$, cioè $a > -\frac{9}{8}$ allora gli autovalori sono reali distinti

$\rightarrow$ se $\Delta = 0$, allora c'è l'autovalore $\frac{3}{2}$ di molt. alg. $= 2$ e molt. geom. $= 1$

Quindi

$$\boxed{A \text{ è diagonalizzabile sui reali} \iff a > -\frac{9}{8}}$$

(c) Per il teorema spettrale la cosa avviene se e solo se A è simmetrica, cioè se e solo se $\boxed{a = 2}$. In tal caso troviamo gli autovalori
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = 4$ e $\lambda = -1$

$A + Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{ker} = \operatorname{Span}(2,-1)$ autovettore di -1

$A - 4 Id = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{ker} = \operatorname{Span}(1,2)$ autovettore di 4

Base ortonormale di autovettori $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

quindi

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M^t A M} \quad \text{con} \quad \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

↑↑ Deve essere ortogonale !!

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 6xy + 4yz.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a la forma quadratica è definita positiva.

(b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare la segnatura della forma quadratica ristretta al sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Sylvester 1-3-2. $Det_{1\times1} = 1$, $Det_{2\times2} = 1$

$Det_{3\times3} = a - 9 - 4 = a - 13$

$\to$ se $a > 13$ la segnatura è $+++$

$\to$ se $a < 13$ la segnatura è $++-$

$\to$ se $a = 13$ la segnatura è $++0$

Quindi la forma è definita positiva se e solo se $\boxed{a > 13}$

(b) Sostituiamo brutalmente $x = -2y - 3z$

$$q(-2y-3z, y, z) = 4y^2 + 9z^2 + 12yz + z^2 + 12y^2 + 18yz + 4yz$$
$$= 16y^2 + 10z^2 + 34yz$$

$\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$ $Det = 160 - 17^2 = 160 - 289 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{segnatura } + -}$

Alternativa per il punto (b). Prendo una base del sottospazio, ad esempio $v = (-2,1,0)$, $w = (-3,0,1)$. Calcoliamo la matrice associata al prodotto in questa base

$\langle v, v \rangle = q(v) = 16$, $\langle w, w \rangle = 10$

$$\langle v, w \rangle = (-2\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5, 6, 2)\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 15 + 2 = 17$$

da cui la stessa matrice di prima $\begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{NB}}$ Basi diverse possono produrre matrici diverse, ma sempre con la stessa segnatura.