Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 22 Gennaio 2022

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1,2,3), \qquad B = (1,0,1), \qquad C = (2,1,0), \qquad D = (-1,1,1).$$

   (a) Determinare la distanza tra il punto A e il piano passante per B, C e D.

   (b) Determinare la distanza tra il punto D e la retta passante per A e B.

   (c) Determinare la distanza tra la retta passante per A e B e la retta passante per C e D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z, w))

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= a, \\ y + 2z &= 2, \\ x - z + bw &= 5. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b l'insieme delle soluzioni del sistema ha dimensione massima, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare, al variare del parametro reale a, una base del Ker della matrice.

   (b) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

   (c) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, ed in tali casi determinare una possibile matrice ortogonale che la diagonalizza.

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 6xy + 4yz.$$

   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la forma quadratica è definita positiva.

   (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare la segnatura della forma quadratica ristretta al sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 22 Gennaio 2022

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (1, 0, 1), \qquad C = (2, 1, 0), \qquad D = (-1, 1, 1).$$

   (a) Determinare la distanza tra il punto A e il piano passante per B, C e D.

   (b) Determinare la distanza tra il punto D e la retta passante per A e B.

   (c) Determinare la distanza tra la retta passante per A e B e la retta passante per C e D.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z, w))

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= a, \\ y + 2z &= 2, \\ x - z + bw &= 5. \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori di a e b l'insieme delle soluzioni del sistema ha dimensione massima, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare del parametro reale a, una base del Ker della matrice.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

(c) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, ed in tali casi determinare una possibile matrice ortogonale che la diagonalizza.

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 6xy + 4yz.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a la forma quadratica è definita positiva.

(b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare la segnatura della forma quadratica ristretta al sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.