Exam paper 11/01/22

Esercizio 2

Consideriamo il problema di minimo

$$\min\left\{ \overbrace{\int_0^3 \left[\dot u^2 + e^{\dot u} + \frac{u^4}{4} - e^{3x}u\right]dx}^{F(u)} : u \in C^1([0,3]),\ u(0)=u(3)=1 \right\}$$

Applichiamo il metodo diretto. Mostriamo che esiste un insieme + nozione di convergenza per cui F è SCI e coercivo e che i pti di min garantiti da Weierstrass lo siano anche per F nella classe di funzioni scelti in partenza:

1. Formulazione debole

In H^1 il funzionale può assumere il valore $+\infty$ e i valori puntuali sono ben definiti poiché $H^1(0,3)$ si immerge nelle Hölder. La nozione di compattezza è uniforme per la parte di funzione e debole L^2 per la derivata

2. Compattezza

Sia u_n t.c. $F(u_n) \leq M$, vogliamo dimostrare che esiste una s.succ convergente secondo la nozione data:

Detta $L(x,s,p)$ la Lagrangiana : $L(x,s,p) \geq p^2 - e^{q}|s|$. A questo punto per DVBC $|u_n(x)| = |u_n(x) \pm u_n(0)| \leq 1 + |u_n(x) - u_n(0)| \leq 1 + \sqrt{3}\|\dot u_n\|$

Quindi sostituendo nella stima che abbiamo trovato per la Lagrangiana concludiamo che $\|\dot u_n\|^2 + A\|\dot u_n\| + B \leq M \Rightarrow \|\dot u_n\| \leq M'$ $(*)$

A questo punto osserviamo che

(1) Per compattezza debole delle palle, $\exists\ n_k$ con $\dot u_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$

(2) Da $(*)$ troviamo che le u_n sono equi-$1/2$ Hölder (ho un equilim sulle derivate e quindi sulla costante di Hölder)

(3) Sempre grazie a $(*)$ più le DBC, dalla Hölderianità troviamo un equilimitazione su $|u_n(x)|$.

(2)+(3) Ci dicono che per A.A $\exists\ n_{k_j}$ (estratta della estratta) con $u_{n_{k_j}} \to u_\infty$. Ora il solito doppio scambio dimostra che $v_\infty = u_\infty$

3. Semicontinuità inferiore

Osserviamo che $p^2 + e^p$ è una funzione convessa e limitata dal basso, abbiamo visto che funzionali del tipo $\int \varphi(\dot u)$ sono SCI deboli. Pertanto nessun problema. Per quanto riguarda la parte di funzione $s \mapsto \frac{s^4}{4}$ è ovviamente continua e quindi possiamo passare al limite grazie alla convergenza uniforme

A questo punto Weierstrass assicura l'esistenza del minimo in H^1. Vogliamo ora mostrare che il punto di minimo stia nella classe scelta in partenza.

4. Regolarità

Consideriamo u_0 il pto di min. e $v \in C^\infty_c([0,3])$

$F(u_0 + tv) = \int_0^3 [(\dot u_0 + t\dot v)^2 + e^{(\dot u_0 + t\dot v)} + \frac{(u_0+tv)^4}{4} - e^{3x}(u_0+tv)]dx$ Possiamo derivare quasi tutti i pezzi dell'integrale rispetto a t in maniera del tutto immediata (sono polinomi in t). L'unico per il quale vale la pena spendere due parole è $\frac{d}{dt}\int_0^3 e^{\dot u_0 + t\dot v}dx = \frac{d}{dt}\int_0^3 e^{\dot u_0}e^{t\dot v}dx$

Ora chiaramente $e^{\dot u_0}e^{t\dot v}$ è limitato poiché u_0 minimizza e $v \in C^\infty_c$.

Quindi otteniamo ELE debole

$$\int_0^3 [2\dot u_0 \dot v + \dot v e^{\dot u_0} + v(u_0^3 - e^{3x})]dx = 0 \quad \forall\, v \in C^\infty_c$$

A questo punto otteniamo ELE debole

$$(2\dot u + e^{\dot u})' = u^3 - e^{3x}$$

Ora con il teorema della funzione inversa otteniamo il classico bootstrap fino a C^∞ perché $t \mapsto 2t + e^t$ è invertibile con inversa C^∞.

A questo punto concludiamo in due passi:

(i) Il minimo è unico

(ii) Ogni soluzione di ELE minimizza. Entrambi i claim seguono dal conto, presa v con $v(0)=v(3)=0$,

$$F(u_0+v) = \int_0^3 \dot u_0^2 + 2\dot u_0\dot v + \dot v^2 + e^{\dot u_0 + \dot v} + \frac{(u_0+v)^4}{4} - e^{3x}(u_0+v)\,dx \qquad g(a+b) \geq g(a) + bg'(a)$$

A questo punto il tutto segue dalla stretta convessità di $x \mapsto x^4$ e di $x \mapsto e^x$. Infatti abbiamo che

$e^{\dot u_0 + \dot v} \geq e^{\dot u_0} + \dot v e^{\dot u_0}$ con uguaglianza $\Leftrightarrow \dot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

$(u_0+v)^4 \geq u_0^4 + 4vu_0^3$ " " $\Leftrightarrow v = 0$

Quindi troviamo

$$F(u_0+v) \geq \int_0^3 \dot u_0^2 + 2\dot u_0 \dot v + \dot v^2 + e^{\dot u_0} + \dot v e^{\dot u_0} + \frac{u_0^4}{4} + v u_0^3 - e^{3x} u - e^{3x} v \, dx =$$

$$= F(u) + \underbrace{\int_0^3 2\dot u_0 \dot v + \dot v e^{\dot u_0} + v(u_0^3 - e^{3x})\, dx}_{=\,0} + \int_0^3 + \dot v^2$$

E quindi tesi.

Esercizio 3

(a) No! Prendiamo $\varphi \in C_c^\infty$ tale che $\|\nabla u\|_{L^1} = 1$. Consideriamo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\varphi(x)$. Allora il vincolo diventa $\lambda - \lambda^2 \|\varphi\|_{L^2}^2 \leq 2$. Ora per $\lambda \to +\infty$ $\lambda - \lambda^2 \|\varphi\|_{L^2}^2 \to -\infty$. In particolare $\exists\, S$ t.c. $\forall \lambda > S$ $\lambda - \lambda\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq 2$. Ovviamente questa famiglia di funzioni ha norma L^1 non limitata e quindi $S(B,1)$ non è limitato in L^1. Questa stessa famiglia di funzioni mostra che $S(B,\alpha)$ non è limitato in L^1 $\forall\, \alpha < 2$. In particolare $S(B,\alpha)$ con $\alpha < 2$ non è limitato in L^p $\forall\, p \geq 1$.

(b) Osserviamo che per $p > \frac{21}{10}$, $W^{1,p}$ si immerge in maniera compatta. Mostriamo quindi che $S(B,p)$ è limitato per $p > \frac{21}{10}$.
Per Poincaré abbiamo che $\forall\, u \in S(B,p)$ $\quad \|u\|_{L^2}^2 \leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \underset{\substack{\text{Hölder + B} \\ \text{misura finita}}}{\leq} c_2 \|\nabla u\|_{L^p}^2$. A questo punto dal vincolo ricaviamo che $\|\nabla u\|_{L^p}^p - c\|\nabla u\|_{L^p}^2 \leq 2$ (*)

Ora la funzione $x^p - cx^2$ è tale che, per $p > \frac{21}{10}$, $\lim_{x\to+\infty} (x^p - cx^2) = +\infty$. (è ovviamente continua) In particolare da (*) ricaviamo che $\|\nabla u\|_{L^p} \leq \pi'$. Di nuovo per Poincaré ricaviamo $\|u\|_{L^p} \leq \pi'' \Rightarrow S(B,p)$ limitato in $W^{1,p} \Rightarrow$ relativamente compatto in L^2.
Rimane ora da verificare il caso in cui $2 \leq p \leq \frac{21}{10}$ . . . . ?