Sampieri David 563011 Ist. Analisi

Esercizio 1

Let us consider the functional

$$F(u) = \int_0^1 [\dot{u}^2(x) + x^2 \dot{u}(x) + u^2(x)]\, dx$$

ⓐ Discuss the minimum problem for $F(u)$ with boundary condition $u(0)=0$.

ⓑ Determine whether there exists a real number c such that the minimizer of $F(u)$ subject to the integral constraint

$$\int_0^1 u(x)\, dx = c$$

Se esiste diventa costante

is a constant function.

ⓐ $L(x,s,p) = p^2 + x^2 p + s^2$

$$\frac{d}{dx} L_p = L_s \qquad L_p = 2p + x^2 \qquad L_s = 2u(x)$$

$$\frac{d}{dx} L_p = 2\ddot{u} + 2x$$

$\Rightarrow$ l'EL è $\ddot{u}(x) + x = u(x) \iff \boxed{\ddot{u}(x) = u(x) - x}$

che sappiamo integrare. Dunque uso il metodo indiretto.

Considero l'equazione

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = u(x) - x \\ u(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = -\frac{1}{2} \leftarrow \text{NBC (on the road)} \end{cases}$$

Infatti, $W = \{ u \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } u(0) = 0 \}$

$$\varphi(t) := F(u + tv) = \int_0^1 \left(\dot{u}^2 + t^2\dot{v}^2 + 2\dot{u}\dot{v}t + x^2\dot{u} + x^2\dot{v}t + u^2 + t^2v^2 + 2tuv \right)$$

Sia u_0 un minimo. Allora se u_0 è abbastanza regolare posso integrare per parti.

$$0 = \varphi'(0) = \int_0^1 \left[2\dot{u}_0(x)\dot{v}(x) + x^2 \dot{v}(x) + 2u_0 v \right] dx$$

Integrando per parti ottengo $\forall v \in C^1([0,1])$ con $v(0)=0$

$$0 = \int_0^1 v(x) \left[2u_0(x) - 2\ddot{u}_0(x) - 2x \right] dx + v(1)\left(2\dot{u}_0(1) + 1 \right)$$

$\uparrow$ $v(0)=0$

→ se $v \in C_c^\infty((0,1))$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{u}_0 = u_0(x) - x}$

→ se $v \in C^1([0,1])$ con $v(1) \neq 0$, $v(0)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{2\dot{u}_0(1) = -1}$ $\Leftrightarrow$

↑ + u_0 risolve equazione

↑ $\boxed{NBC}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2}}$

Dunque se u_0 è un minimo regolare $\Rightarrow$ risolve il seguente

sistema

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 = u_0(x) - x \\ u_0(0) = 0 \\ \dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$u_0(x) = a e^x + b e^{-x} + v(x)$ con $v(x)$ una soluzione particolare.

$V(x) := \alpha x + \beta$ $\Rightarrow$ $0 = \alpha x + \beta - x$ $\Leftrightarrow$ $\beta = 0$ $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ $V(x) = x$

$\Rightarrow$ $\boxed{u_0(x) = a e^x + b e^{-x} + x}$, con a e b da scegliere.

$$\begin{cases} u_0(0) = 0 \\ \dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ae - \frac{b}{e} + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -be - \frac{b}{e} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b\left(-e - \frac{1}{e}\right) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{3}{2} \frac{e}{e^2+1}}$$

$$\boxed{a = -\frac{3}{2}\,\frac{e}{e^2+1}}$$

Dunque il sistema ammette un'unica soluzione.

$u_0 \in C^\infty([0,1])$ e dunque posso integrare per parti.

Mostriamo che u_0 e' l'unico minimo di F.

Sia $u_0 + v$ un altro candidato, con

$v \in C^1([0,1])$ e $v(0) = 0$.

$$F(u_0+v) = \int_0^1 [\dot{u}_0^2 + 2\dot{u}_0\dot{v} + \dot{v}^2 + x^2\dot{u}_0 + x^2\dot{v} + u^2 + v^2 + 2uv)\,dx$$

$$= F(u_0) + \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)\,dx + \int_0^1 [\dot{v}(2\dot{u}_0 + x^2) + 2u(x)v(x)]\,dx$$

$$= F(u_0) + \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)\,dx + 0 \geq F(u_0)$$

$\uparrow$ U_0 RISOLVE ELE + BC $v(0)=0$ $\dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2}$

|| INTEGRAZIONE PER PARTI

e vale l'uguaglianza $\iff \boxed{v \equiv 0}$

Dunque u_0 e' l'unico minimo di F, e sta anche in $C^\infty([0,1])$.

(b) Consideriamo $\int_0^1 u(x)\,dx = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Lo spazio vettoriale associato e'

$$W = \{ v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } \int_0^1 v(x)\,dx = 0 \}$$

Quindi voglio usare DDR o FLCV con media nulla.

Riprendendo il ragionamento di prima,

$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 \dots \, dx$. (Sia u_0 un minimo.)

COND. NECESSARIA $\Rightarrow$ $\varphi'(0) = 0$ dove $0 = \varphi'(0) = \int_0^1 [2\dot{u}_0(x)\dot{v}(x) + x^2\dot{v}(x) + 2u_0 v(x)]\,dx$

Dunque per FLCV a media nulla, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{\ddot{u}_0(x) = u_0(x) - x + \lambda}$$ con λ incognito.

Integrando per parti ELE in 2^{nd}-integral form otteniamo

$$0 = \int_0^1 \left[\left(-2\ddot{u}_0 - 2x\right) v(x) + 2u_0(x)\, v(x) \right] dx \; +$$

$$+ \; v(1)\left(2\dot{u}_0(1) + 1\right) - v(0)\left(2\dot{u}_0(0)\right) \qquad \forall v \in W.$$

Se $v \in C_c^\infty((0,1)) \underset{\substack{\text{FLCV} \\ \text{a media} \\ \text{nulla}}}{\Longrightarrow}$ Trovo ELE.

- Se $v \in C^1((0,1))$ con $v(0) \neq 0$ $v(1) = 0$

allora $\boxed{\dot{u}_0(0) = 0}$.

- Se $v \in C^1((0,1))$ con $v(0) = 0$ $v(1) \neq 0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2}}$$

Che sono le Neumann BC. Quindi il sistema da risolvere diviene:

$$\begin{cases} \ddot{u}_0(x) = u_0(x) - x + \lambda \\ \dot{u}_0(0) = 0 \\ \dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2} \\ \int_0^1 u_0(x) = c \end{cases}$$

Vediamo quando ammette soluzione, e quando tale soluzione è costante.

$$u_0(x) = a e^x + b e^{-x} + v(x)$$

$$v(x) = \alpha x + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta - x + \lambda = 0 \iff$$

$$\beta = -\lambda \quad e \quad \alpha = 1$$

Dunque $u_0(x) = a e^{x} + b e^{-x} + x - \lambda$

$$\begin{cases} \dot{u}_0(0) = 0 \\ \dot{u}_0(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ ae - \frac{b}{e} + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b - 1 \\ (b-1)e - \frac{b}{e} = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff b\left(e - \frac{1}{e}\right) = -\frac{3}{2} + e$$

$$\iff \boxed{b = \frac{-\frac{3}{2} + e}{e^2 - 1} \cdot e} \qquad \boxed{a = b - 1}$$

Adesso devo integrare tale soluzione per trovare λ.

$$c = \int_0^1 u_0(x)\, dx = a\, e^{x}\Big|_0^1 - b\, e^{-x}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \lambda x\Big|_0^1$$

$$\iff c = a(e-1) - b\left(\frac{1}{e} - 1\right) + \frac{1}{2} + \lambda \iff$$

$$c = a(e-1) + b\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{2} + \lambda$$, facendo

i calcoli si trova $\lambda(c)$ che risolve l'equazione, $\forall c \in \mathbb{R}$, in quanto a e b sono fissati da sopra.

Dunque trovati a, b, e λ abbiamo esplicitato $u_0(x)$ che risolve il sistema.

Mostriamo adesso che tale soluzione e' l'unico punto di minimo per F. (Anche qui uso' la regolarita' di u_0).

Sia $v \in C^1((0,1))$ con $\int_0^1 v(x)\, dx = 0$.

$$F(u_0 + v) = \int_0^1 (\dot{u}_0 + \dot{v})^2 + x^2(\dot{u}_0 + \dot{v}) + (u_0 + v)^2\, dx =$$

$$= F(u_0) + \int_0^1 \dot{v}^2 + v^2\, dx + \int_0^1 \left[2\dot{u}_0(x)\dot{v}(x) + x^2\dot{v}(x) + 2u_0(x)v(x)\right] dx$$

Integrando per parti, usando FLCV a media nulla (con $v \in C_c^\infty((0,1))$) e ricordando che u_0 risolve il sistema precedente, (con gli stessi calcoli di prima) otteniamo che

$$\int_0^1 \left[2\dot u_0 \dot v + x^2 \dot v + 2u_0 v(x)\right] dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty((0,1))$$

con $\int_0^1 v(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow F(u_0+v) = F(u_0) + \int_0^1 \dot v^2 + v(x)\,dx \geq F(u_0) \quad \text{e}$$

vale $(=) \iff \boxed{v \equiv 0}$.

oss. Dunque $\forall c \in \mathbb{R}$ $\exists$ unico minimo $u_0^c(x)$ di F sotto la condizione

$$\int_0^1 u_0^c(x)\,dx = c.$$

Ma se $u_0^c(x)$ fosse costante $\Rightarrow$ (derivate sono nulle)

$$F(u_0^c) = \int_0^1 \underbrace{(u_0^c(x))^2}_{=\,\mathrm{cost}(c)}\,dx = \mathrm{cost}^2(c).$$

$$\boxed{u_0^c(x) \equiv c} \ \forall x \Leftarrow \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COSTANTE}}}{u_0^c(x)}\,dx = c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(u_0^c) = c^2}.$$ Dunque c^2 sarebbe il valore minimo di F.

- Se $\boxed{c=0}$ $\boxed{F(u_0^0) = 0}$ e questo è ok.

E $u_0(x) \equiv 0$ è il punto di minimo.

$p^2 + x^2 p$ $\qquad 2p + x^2 \geq 0 \iff p \geq -\frac{x^2}{2}$

$p = -\frac{x^2}{2}$ $\qquad p^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{2} = -\frac{x^4}{2}$ $\qquad \Delta < 0$

è sempre positiva

~~Poiché~~ $\cancel{p^2 + x^2 p \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow \boxed{F(u) \geq 0} \quad \forall u \in X}$.

~~Infatti~~ $\cancel{\varphi(p) = p^2 + x^2 p}$ ~~con x fissato~~

$\cancel{\Rightarrow \varphi'(p) = 2p + x^2 \qquad \varphi'(p) = 0 \iff p = -\frac{x^2}{2}}$

$\cancel{\varphi\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{4} < 0}$.

- Però se $u_0^c(x)$ è il minimo, per i calcoli svolti in precedenza

$u_0^c(x)$ non è mai costante $\forall c \in \mathbb{R}$,

poiché $u_0^c(x)$ presenta un termine in x coefficiente $\neq 0$. Dunque il minimo non è mai una costante.

Sampiai David 563011

Esercizio 2

Discuss existence, uniqueness, and regularity of solutions to the boundary value problem

$$(2+e^{u'})\,u'' = u^3 - e^{3x} \qquad u(0)=u(3)=1$$

$$\frac{d}{dx} L_p(x,u(x),\dot u(x)) = L_s$$

$$2\ddot u + e^{\dot u}\ddot u = \frac{d}{dx} L_p(\dots) \qquad L_p = 2p + e^p$$

$$L_s = s^3 - e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(x,s,p) = p^2 + e^p + \frac{s^4}{4} - e^{3x} s}$$

Weak formulation: Sia $X = \{u \in H^1((0,3)) \text{ t.c. } u(0)=u(3)=1\}$

ben posti

$F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$F(u) = \int_0^3 \left[\dot u^2 + e^{\dot u(x)} + \frac{u(x)^4}{4} - e^{3x} u(x)\right] dx$$

Compactness: Sia $\{u_n\} \subseteq X$ t.c. $F(u_n) \leq M$, per qualche $M \in \mathbb{R}$.

$$L(x,s,p) \geq p^2 + \frac{s^4}{4} - e^9 |s| \geq p^2 + \frac{s^4}{8} - A \quad \text{con } A \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad M \geq F(u_n) \geq \int_0^3 \dot u_n^2(x)\,dx - A\cdot 3 \quad \forall n \Rightarrow \exists M' \in \mathbb{R}$$

t.c. $\|\dot u_n\|_{L^2((0,3))} \leq M' = \sqrt{M+3A}$

Inoltre, $u_n \in H^1((0,3)) \Rightarrow$

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \|\dot u_n\|_{L^2} |y-x|^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x,y \in ((0,3))$$

$\Rightarrow$ le u_n sono equi-Hölder $\Rightarrow$ equicontinue

STIMA SULLE $\|\dot u_n\|_{L^2} \leq M'$

poiché $u_m(0) = 1 \quad \forall m \quad \Rightarrow$

$|u_m(x)| \leq 1 + M' \cdot \sqrt{3} \leq M'' \qquad \forall m$

$\Rightarrow$ Le u_m sono equilimitate.

Per A. A. in $[0,3]$ e per compattezza debole delle palle in $L^2((0,3))$ esiste una sottosuccessione u_{m_k} t.c.

$$u_{m_k} \to u_\infty \quad \text{uniformemente in } [0,3]$$

$$\dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty \quad \text{debol. in } L^2((0,3)).$$

oss. $u_\infty \in X$. Infatti, $u_\infty(0) = u_\infty(3) = 1$ poiché ho convergenza uniforme sulle funzioni.

Inoltre, $\displaystyle\int_0^3 u_{m_k}\, \dot\varphi(x)\,dx \underset{\text{DEF}}{=} -\int_0^3 \dot{u}_{m_k}\, \varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,3))$

$\downarrow$ unif. $\qquad\qquad \downarrow$ debole L^2 $\quad (\varphi \in L^2((0,3)))$

$$\int_0^3 u_\infty\, \dot\varphi(x)\,dx \qquad -\int_0^3 v_\infty\, \varphi(x)\,dx$$

$\Rightarrow \dot{u}_\infty = v_\infty . \Rightarrow u_\infty \in X$.

LSC: ~~per convessità~~

Diciamo che $u_m \to u_\infty \iff u_m \to u_\infty$ unif. in $[0,3]$
$\dot{u}_m \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ in L^2 deb.

Allora per convessità

$$p \to p^2 \quad e \quad p \to e^p$$

e per convergenza debole sulle derivate, vale

$$\liminf_{m \to +\infty} \int_0^3 \dot{u}_m^2(x) \geq \int_0^3 \dot{u}_\infty^2(x)\,dx$$

$$\liminf_{m \to +\infty} \int_0^3 e^{\dot{u}_m}\,dx \geq \int_0^3 e^{\dot{u}_\infty(x)}\,dx$$

Inoltre, poiché $u_n \to u_\infty$ unif. in $[0,3]$ e

$s \to \frac{s^4}{4}$ è continua

$s \to e^{-3x} s$ è continua

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^3 \left[\frac{u_n^4}{4} - e^{-3x} u_n(x)\right] dx = \int_0^3 \left[\frac{u_\infty^4}{4} - e^{-3x} u_\infty(x)\right] dx$$

A questo punto sappiamo che esiste un minimo di F.
Sia u_0 un punto di minimo.

Regularity: Sia $v \in W = \{ v \in H^1((0,3))$ t.c. $u(0) = u(3) = 0\}$

allora $\forall t \in [-1, 1)$ poniamo

$$\varphi(t) := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minimo}}}{F(u_0 + tv)} = \int_0^3 \left[(\dot{u}_0 + t\dot{v})^2 + e^{(\dot{u}_0 + t\dot{v})} + \frac{(u_0 + tv)^4}{4} - e^{-3x}(u_0 + tv)\right] dx$$

$$\varphi'(t) = \int_0^3 \left[2(\dot{u}_0(x) + t\dot{v})\dot{v}(x) + \dot{v}\, e^{\dot{u}_0 + t\dot{v}} + (u_0 + tv)^3 v(x) - e^{-3x} v(x)\right] dx$$

$\varphi'(t)$ è ben definito $\forall t \in [-1, 1]$, con $v \in C^1([0,3])$ con $v(0) = v(3) = 0$

Infatti, per

- $|\dot{u}_0 + t\dot{v}||\dot{v}| \leq \text{cost}\, |\dot{u}_0| \in L^1((0,3))$ poiché $\dot{u}_0 \in L^2((0,3))$.
- $|\dot{v}|\, e^{\dot{u}_0 + t\dot{v}} \leq \text{cost}_1\, e^{\dot{u}_0(x)}$.

$e^{\dot{u}_0(x)} \in L^1((0,3))$ poiché u_0 è un minimo.

$\int_0^3 e^{\dot{u}_0(x)} < +\infty$ poiché

$F(u_0) < +\infty$ e $\int_0^3 \dot{u}_0^2 \, dx$ e $\int_0^3 \frac{u_0^4}{4}(x)\, dx$

e $\int_0^3 e^{-3x} u_0(x)\, dx$ sono finiti poiché u_0 è continua in $[0,3]$.

Dunque

$$\int_0^3 e^{\dot u_0(x)}\,dx = F(u_0) - \int_0^3 \dot u_0(x)\,dx - \int_0^3 \frac{u_0^4}{4} - e^{-3x} u_0 \, dx < +\infty$$

- gli ultimi due termini sono ben definiti poiché $u_0 \in H^1((0,3)) \Rightarrow u_0$ continua.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u_0 \text{ minim.}}}{0 =} \varphi'(0) = \int_0^3 \left[2\dot u_0 \dot v(x) + e^{\dot u_0} \dot v + u_0^3 v(x) - e^{-3x} v(x) \right] dx$$

Da $v \in C_c^\infty((0,3)) \Rightarrow$ per definizione di derivata debole

$$\boxed{\left(2\dot u_0 + e^{\dot u_0}\right)' = u_0^3 - e^{-3x}}$$ ELE weak form

Inoltre $u_0(0) = u_0(3) = 1$.

Poiché u_0 è continua $\Rightarrow$ $LHS \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CLASSICAL} \\ \text{COMP.}}}{C^0((0,3))} \Rightarrow$

$$2\dot u_0 + e^{\dot u_0} \in C^1((0,3)) \Rightarrow \dot u_0 \in C^1((0,3))$$

$$\varphi(p) = 2p + \underset{\substack{\uparrow \\ C^\infty}}{e^p} \qquad \varphi'(p) = 2 + e^p > 0$$

$\Rightarrow$ per il Teorema della funzione inversa φ^{-1} è C^∞

Ma $\dot u_0 = \varphi^{-1}(\underset{\substack{\uparrow \\ C^1}}{2\dot u_0 + e^{\dot u_0}}) \Rightarrow \dot u_0 \in C^1((0,3)) \Rightarrow u_0 \in C^2((0,3))$.

Adesso poiché φ^{-1} è C^∞, by bootstrap otteniamo che $u_0(x) \in C^\infty((0,3))$.

<u>Uniqueness</u>: i) ogni soluzione dell'equazione è un minimo per F

ii) il punto di minimo di F è unico in H^1.

i) Sia u_0 una soluzione di ELE C^2.

Sia $u_0 + v$ un altro candidato con $v(0) = v(3) = 0$.

Allora

$$F(u_0+v) = \int_0^3 (\dot u_0 + \dot v)^2 + e^{\dot u_0 + \dot v} + \frac{(u_0+v)^4}{4} - e^{-3x}(u_0 + v(x))\, dx$$

$$\underset{\substack{p \to e^p \\ \text{CONVESSA STRETTA} \\ e^{a+b} \geq e^a + e^a b \\ s \to \frac{s^4}{4} \text{ STRETTAMENTE CONVESSA}}}{\geq} \int_0^3 \dot u_0^2 + \dot v^2 + 2\dot u_0 \dot v + e^{\dot u_0} + e^{\dot u_0}\dot v(x) + \frac{u_0^4}{4} + u_0^3 v(x) - e^{-3x}u_0(x) - e^{-3x}v(x) \,]\, dx =$$

$$= F(u_0) + \int_0^3 \dot v^2(x)\, dx + \int_0^3 (e^{\dot u_0}(x) + 2\dot u_0)\dot v(x) + v(x)[u_0^3 - e^{-3x}]\, dx \underset{\substack{\text{INTEGRO PER PARTI; } u_0 \text{ RISOLVE} \\ \text{EQUAZIONE } + v(0)=v(3)=0}}{=} F(u_0) + \int_0^3 \dot v^2(x)\, dx \geq F(u_0)$$

Dunque $F(u_0+v) \geq F(u_0)$ $\forall v$ come sopra.

Vale $=$ $\Leftrightarrow$ $\dot v \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ $v \equiv \text{cost}$ $\underset{\text{DBC}}{\Leftrightarrow}$ $v \equiv 0$

ii) Sia u_0 un minimo $\Rightarrow$ esso è unico.

La dimostrazione è analoga, solo che

$$\int_0^3 [e^{\dot u_0}(x) + 2\dot u_0(x)]\dot v(x) + [u_0^3 - e^{-3x}]v(x)\,]\, dx = 0$$

poiché se u_0 è un minimo $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ la variazione prima è nulla (FORMA DEBOLE), come abbiamo visto in precedenza.

Dunque $F(u_0 + v) \geq F(u_0) + \int_0^3 \dot v^2(x)\, dx \geq F(u_0)$

e vale $=$ $\Leftrightarrow$ $v \equiv 0$ $\Rightarrow$ u_0 è l'unico MINIMO.

oss. La stretta disuguaglianza segue anche dalla stretta convessità delle funzioni:

$$s \to \frac{s^4}{4} \qquad p \to p^2 + e^p .$$