Exam Paper 11/01/22

Esercizio 1

Procediamo con il metodo indiretto. Prendiamo $X = \{ u \in C^1([0,1]) \mid u(0)=0 \}$. X è già di per sé uno spazio vettoriale. Supponiamo che u sia punto di minimo. Allora un semplice calcolo mostra che, detta $\varphi(t) = F(u+tv)$ dove $v \in X$,

$\varphi'(t) = \int_0^1 [2\dot u \dot v + 2t\dot v^2 + x^2 \dot v + 2uv + tv^2]\,dx$ (Posso derivare tranquillamente rispetto a t poiché $\varphi(t)$ è banalmente un polinomio di secondo grado in t)

In particolare u min $\Rightarrow 0 = \varphi'(0) = \int_0^1 [2\dot u \dot v + x^2 \dot v + 2uv]\,dx \Rightarrow \int_0^1 \dot v (2\dot u + x^2)\,dx = -\int 2uv\,dx$. Supponendo di avere regolarità a sufficienza per integrare per parti otteniamo:

$$v(1)(2\dot u + 1) - \int_0^1 v(2\ddot u + 2x)\,dx = -\int_0^1 2uv\,dx.$$

Ora osserviamo che $C_c^\infty([0,1]) \subseteq X$. In particolare troviamo che, grazie al FLCV deve essere $\ddot u - u + x = 0$.
Una volta che abbiamo questa, possiamo scegliere $v \in X$ con $v(1) \neq 0$ e trovare $2\dot u(1) = -1$. Abbiamo quindi il problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot u - u + x = 0 \\ u(0) = 0 \\ \dot u(1) = -1/2 \end{cases} \quad (*)$$

La soluzione generale dell'equazione è $\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + x$. Imponendo le condizioni troviamo che

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 e - \lambda_2 \frac{1}{e} + 1 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1 e^2 - \lambda_2}{e} = -3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1 (e^2+1)}{e} = -3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{3e}{2(e^2+1)} \\ \lambda_1 = -\frac{3e}{2(e^2+1)} \end{cases}$$

Prendiamo quindi u_0 tale funzione. Ogni altra funzione $u \in X$ è $u_0 + v$, $v \in X$. Allora

$$F(u_0+v) = \int_0^1 [\dot u^2 + 2\dot u \dot v + \dot v^2 + x^2(\dot u + \dot v) + u^2 + v^2 + 2uv]\,dx$$

$$= F(u_0) + \underbrace{\int_0^1 [2\dot u \dot v + x^2 \dot v + 2uv]\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{Poiché } u_0 \text{ soddisfa } (*)} + \int_0^1 \dot v^2 + v^2\,dx$$

In particolare $\int_0^1 \dot v^2 + v^2\,dx \geq 0 \ \forall v \in X \Rightarrow F(u_0+v) \geq F(u_0)$ e vale uguaglianza $\Leftrightarrow \int_0^1 \dot v^2 + v^2 = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow u = u_0 \Rightarrow$ Il problema di min ammette un'unica soluzione

(b) Usiamo i moltiplicatori di Lagrange (Forse Overkill). Consideriamo $X = C^1([0,1])$. Minimizziamo F soggetto al vincolo $G(u) = 0$ dove $G_c(u) = \int_0^1 [u(x) - c]\,dx$. Osserviamo che se u_0 è un punto di min e se $\delta G(u_0, v) = 0 \ \forall v \in X$ avremmo $\int_0^1 v\,dx = 0 \ \forall v \in X \Rightarrow$ assurdo. Quindi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ con
$\delta[F - \lambda G](u_0, v) = 0. \Rightarrow \int_0^1 2\dot u \dot v + x^2 \dot v + 2uv + \lambda v\,dx = 0$. Posso permettermi di sfruttare $C_c^\infty([0,1]) \subseteq X$ e quindi per FLCV otteniamo, dopo aver integrato per parti:

$\ddot u - u + x - \lambda/2 = 0 \quad (*)$

Una volta che abbiamo $(*)$ possiamo usare le $v \in X$ non nulle al bordo e trovare che u_0 è soluzione del seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot u - u + x - \lambda/2 = 0 \\ \dot u(0) = 0 \\ \dot u(1) = -1/2 \\ \int_0^1 u(x)\,dx = c \end{cases} \quad (\Delta)$$

$\frac{2 - 3e + 2e^2 - 2}{}$

$u(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + x - \lambda/2$. Dalle NBC ricaviamo λ_1 e λ_2;

$\frac{2-3e}{2(e^2-1)} + 1$

$\dot u(x)\ \lambda_1 e^x - \lambda_2 e^{-x} + 1$

$\dot u(0) = \lambda_1 - \lambda_2 + 1 = 0$

$\dot u(1) = \lambda_1 e - \lambda_2 \frac{1}{e} + 1 = -1/2$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + 1 \\ \frac{\lambda_1 e^2 - \lambda_2}{e} = -3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + 1 \\ \frac{\lambda_1 e^2 - \lambda_1 - 1}{e} = -3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + 1 \\ \frac{\lambda_1 (e^2-1)}{e} = \frac{1}{e} - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 + 1 \\ \lambda_1 = \frac{2-3e}{2e} \frac{e}{(e^2-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{2e^2-3e}{2(e^2-1)} \\ \lambda_1 = \frac{2-3e}{2(e^2-1)} \end{cases}$$

Con la condizione sull'integrale troviamo λ:

$$\int_0^1 u(x) = \int_0^1 \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + x - \lambda/2 \, dx = c$$

$$\left[\lambda_1 e^x\right]_0^1 + \left[-\lambda_2 e^{-x}\right]_0^1 + 1/2 - \lambda/2 = c \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lambda_1 e - \frac{\lambda_2}{e}}_{= -3/2} \underbrace{- \lambda_1 + \lambda_2}_{= 1} + 1/2 - \lambda/2 = c \Rightarrow \lambda = -2c.$$

Ora prendiamo qualsiasi altro competitor: $u = u_0 + v$, con $\int_0^1 v = 0$ (siamo in X ristretto al vincolo)

$$F(u) = F(u_0 + v) = F(u_0) + \underbrace{\int_0^1 [2\dot{u}\dot{v} + x^2 \dot{v} + 2uv] \, dx}_{= \lambda \int_0^1 v \, dx = 0} + \int_0^1 \dot{v}^2 + v^2 \, dx$$

E quindi abbiamo esistenza e unicità! Ora per unicità nessun valore di c rende costante la u_0 che abbiamo trovato.