venerdì 22 ottobre 2021

Esercizio 1

Risolvere il seguente integrale doppio :

$$\iint_D \frac{\left(y^2 - x^2\right) \cdot e^{\left[\left(x-y\right)^2 + \sqrt{xy}\right]}}{\sqrt{xy}} \, dx \, dy$$

dove l'insieme di integrazione D è dato da

$$D = \left\{ \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le xy \le 2, \quad x \le y \le x + 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0 \right\}$$

Svolgimento :

Si esegue il seguente cambio di variabili :

$$\begin{cases} y - x = u \\ y + x = v \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{v-u}{2} \\ y = \frac{v+u}{2} \end{cases}$$

da cui segue che il valore assoluto del determinante jacobiano è dato da :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \implies |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

mentre l'insieme di integrazione D si trasforma in

$$D \mapsto E = \left\{ \left(u, v\right) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le \frac{v^2 - u^2}{4} \le 2 \,, \quad 0 \le u \le 1 \,, \quad v \ge 0 \right\}$$

La funzione integranda diventa invece :

$$g(u, v) = \frac{uv \cdot e^{u^2} \cdot e^{\left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{2}\right)}}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

Ci siamo dunque ridotti a risolvere il seguente integrale doppio :

$$\iint_E \frac{uv \cdot e^{u^2} \cdot e^{\left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{2}\right)}}{\sqrt{v^2 - u^2}} \, du \, dv$$

A questo punto si esegue un secondo cambio di variabili :

$$\begin{cases} u = s \\ \dfrac{\sqrt{v^2 - u^2}}{2} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} u = s \\ v = \sqrt{4t^2 + s^2} \end{cases}$$

L'insieme di integrazione E diventa

$$E \mapsto F = \left\{ \left(s, t\right) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq s \leq 1 , \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2} \right\}$$

Il valore assoluto del determinante jacobiano è dato da

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{s}{\sqrt{4t^2 + s^2}} & \dfrac{4t}{\sqrt{4t^2 + s^2}} \end{vmatrix} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + s^2}}$$

La funzione integranda diventa infine

$$h(s, t) = 2s \cdot e^{s^2} \cdot e^t$$

L'integrale di partenza diventa dunque

$$\iint_F 2s \cdot e^{s^2} \cdot e^t \, ds \, dt = \int_0^1 2s \cdot e^{s^2} \, ds \int_1^{\sqrt{2}} e^t \, dt = \int_0^1 e^z \, dz \int_1^{\sqrt{2}} e^t \, dt = \left(e^{\sqrt{2}} - e\right)\left(e - 1\right)$$