Affinità

Argomenti: trasformazioni affini e omotetie **Difficoltà:** $\star\star\star$

Prerequisiti: affinità, matrici, sistemi lineari

1. Dimostrare che la composizione di due affinità da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è ancora un'affinità.

2. Dimostrare che un'affinità $Ax + b$ è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile, ed in tal caso determinare la trasformazione inversa.

3. Consideriamo le seguenti condizioni:
$$f(1,1) = (1,2), \qquad f(0,-4) = (2,1), \qquad f(1,-1) = (2,0).$$
   (a) Dimostrare che esiste un'unica affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni precedenti. Determinare esplicitamente tale affinità.
   (b) Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$.
   (c) Determinare la retta che ha come immagine la retta $y = 2x - 1$.

4. Consideriamo il rettangolo del piano con vertici in $(3,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(3,4)$.
   Determinare quante sono le affinità in $\mathbb{R}^2$ che mandano il rettangolo nel quadrato con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Scrivere esplicitamente le espressioni di tali affinità.

5. (Omotetie rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$)
   (a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.
   (c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:
$$y = 2x, \qquad y = 2x + 5, \qquad y = -2x + 3, \qquad x + y - 1 = 0.$$
   (d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.
   (e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

6. (Omotetie rispetto ad un punto qualunque di $\mathbb{R}^2$)
   (a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto al punto $(2,-1)$ di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.
   (c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:
$$y = 2x, \qquad y = 2x + 5, \qquad y = -2x + 3, \qquad x + y - 1 = 0.$$
   (d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.
   (e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

7. Scrivere l'espressione generale dell'omotetia di fattore λ rispetto al punto (x_0, y_0) e determinare i suoi punti fissi.

8. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima l'omotetia di fattore 6 rispetto al punto $(3,7)$ e poi l'omotetia di fattore $1/2$ rispetto al punto $(2,-5)$.

SOLUZIONI ?
BY GIMUSI 12/01/14

1. Dimostrare che la composizione di due affinità da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è ancora un'affinità.

$$f_1(x)=A_1x+b_1 \qquad f_2(x)=A_2x+b_2 \qquad x\in\mathbb{R}^n \quad b_1,b_2\in\mathbb{R}^n \quad A_1,A_2\in M_{n\times n}$$

$$f_1(f_2(x)) = A_1(A_2x+b_2)+b_1 = A_1A_2x+A_1b_2+b_1 = \hat{A}x+\hat{b}$$

2. Dimostrare che un'affinità $Ax+b$ è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile, ed in tal caso determinare la trasformazione inversa.

$$f(x)=Ax+b \qquad Ax=f(x)-b \rightsquigarrow x=A^{-1}[f(x)-b]$$

$$\rightsquigarrow x=A^{-1}f(x)-A^{-1}b \qquad g(z)=A^{-1}z-A^{-1}b=Bz+c$$

3. Consideriamo le seguenti condizioni:

$$f(1,1)=(1,2), \qquad f(0,-4)=(2,1), \qquad f(1,-1)=(2,0).$$

(a) Dimostrare che esiste un'unica affinità $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni precedenti. Determinare esplicitamente tale affinità.

(b) Determinare l'immagine della retta $y=2x-1$.

(c) Determinare la retta che ha come immagine la retta $y=2x-1$.

(a) $f(x)=Ax+b \qquad A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} f(1,1)=(1,2) \rightsquigarrow \\ f(0,-4)=(2,1) \rightsquigarrow \\ f(1,-1)=(2,0) \rightsquigarrow \end{array} \begin{cases} a_1+a_2+b_1=1 & a_3+a_4+b_2=2 \\ -4a_2+b_1=2 & -4a_4+b_2=1 \\ a_1-a_2+b_1=2 & a_3-a_4+b_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1+2b_1=3 \rightsquigarrow a_1=\frac{3}{2}-b_1 \rightsquigarrow a_1=3/2 \\ a_2=-\frac{1}{2}+\frac{b_1}{4} \rightsquigarrow a_2=-1/2 \\ \cancel{\frac{3}{2}}-\cancel{b_1}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{b_1}{4}+\cancel{b_1}=\cancel{2} \rightsquigarrow b_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_3+2b_2=2 \rightsquigarrow a_3=1-b_2 \rightsquigarrow a_3=-4 \\ a_4=-1/4+\frac{b_2}{4} \rightsquigarrow a_4=1 \\ 1-\cancel{b_2}+\frac{1}{4}-\frac{b_2}{4}+\cancel{b_2}=0 \rightsquigarrow b_2=5 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -4 & 1\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 5\end{pmatrix}$$

(b) $y=2x-1 \rightsquigarrow x=(\delta, 2\delta-1)$

$$Ax+b=\left(\frac{3}{2}\delta-\frac{1}{2}(2\delta-1), -4\delta+2\delta-1+5\right)=\left(\frac{3}{2}\delta-\delta+\frac{1}{2}, -2\delta+4\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, -2\delta+4\right)=\left(\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, -4\left(\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\right)+6\right) \rightsquigarrow y=-4x+6$$

(c) $A=\begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}0\\ 5\end{pmatrix}$ $\quad g(z)=A^{-1}z-A^{-1}b=Bz+c$

$B=A^{-1}=-2\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 4 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -8 & -3\end{pmatrix}$ $\quad c=-A^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\ 15\end{pmatrix}$

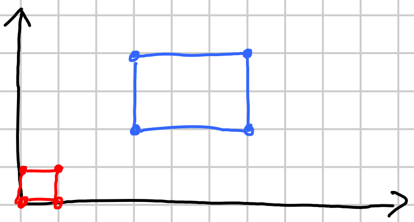
$y=2x-1 \rightsquigarrow z=(\delta, 2\delta-1)$

$Bz+c=(-2\delta-2\delta+1+5, -8\delta-6\delta+3+15)=(-4\delta+6, -14\delta+18)=$

$=(-4\delta+6, \frac{14}{4}(-4\delta+6)-3) \rightsquigarrow y=\frac{7}{2}x-3$

4. Consideriamo il rettangolo del piano con vertici in $(3,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(3,4)$.

Determinare quante sono le affinità in $\mathbb{R}^2$ che mandano il rettangolo nel quadrato con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Scrivere esplicitamente le espressioni di tali affinità.



$\left.\begin{array}{l}(6,2)-(3,2)=(3,0)\rightsquigarrow(1,0)\\ (3,4)-(3,2)=(0,2)\rightsquigarrow(0,1)\end{array}\right\} A=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow b=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow f(x)=Ax+b=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$

5. (Omotetie rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$)

(a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.

(c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y=2x, \qquad y=2x+5, \qquad y=-2x+3, \qquad x+y-1=0.$$

(d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.

(e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2+y^2-3x=0$.

(a) $f(x)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3x$

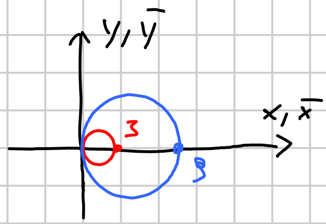
(b) $f(x)=3x=x \rightsquigarrow \begin{cases}3x=x\\ 3y=y\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

(c) $y=2x \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\\ 2\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\delta\\ 6\delta\end{pmatrix} \equiv y=2x$

$$y=2x+5 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ 2\sigma+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma\\ 6\sigma+15\end{pmatrix} \equiv y=2x+15$$

$$y=-2x+3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ -2\sigma+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma\\ -6\sigma+9\end{pmatrix} \equiv y=-2x+9$$

$$x+y-1=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ 1-\sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma\\ 3-3\sigma\end{pmatrix} \equiv y+x-3=0$$



(d) $y=2x \rightsquigarrow y=2x \qquad y=2x+\frac{5}{3} \rightsquigarrow y=2x+5$

$y=2x+1 \rightsquigarrow y=2x+3 \qquad x+y-\frac{1}{3}=0 \rightsquigarrow x+y-1=0$

(e) $x^2+y^2-3x=0 \rightsquigarrow \begin{cases}\bar{x}=3x\\ \bar{y}=3y\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{1}{3}\bar{x}\\ y=\frac{1}{3}\bar{y}\end{cases} \rightsquigarrow \frac{\bar{x}^2}{9}+\frac{\bar{y}^2}{9}-3\,\frac{1}{3}\bar{x}=0 \qquad \bar{x}^2+\bar{y}^2-9\bar{x}=0$

6. (Omotetie rispetto ad un punto qualunque di $\mathbb{R}^2$)

(a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto al punto $(2,-1)$ di $\mathbb{R}^2$.

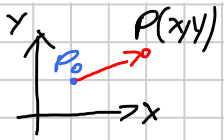
(b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.

(c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:

$$y=2x, \qquad y=2x+5, \qquad y=-2x+3, \qquad x+y-1=0.$$

(d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.

(e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2+y^2-3x=0$.

(a) 

$P \rightsquigarrow P_0+3(P-P_0) \qquad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \rightsquigarrow 3\left[\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=$

$=3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6+2\\ 3-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow f(x)=Ax+b=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}$

(b) $f(x)=x \rightsquigarrow Ax+b=x \quad 2x=b \quad x=b/2 \rightsquigarrow x=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\equiv P_0$

(c) $y=2x \rightsquigarrow 3\begin{pmatrix}\sigma\\ 2\sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma-4\\ 6\sigma+2\end{pmatrix} \equiv y=2x+10$

ex $(1,2) \rightsquigarrow (-1,8) \quad 8=-2+10$

$y=2x+5 \rightsquigarrow 3\begin{pmatrix}\sigma\\ 2\sigma+5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma-4\\ 6\sigma+17\end{pmatrix} \equiv y=2x+25$

ex $(-1,3) \rightsquigarrow (-7,11) \quad 11=-14+25$

$y=-2x+3 \rightsquigarrow 3\begin{pmatrix}\sigma\\ -2\sigma+3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma-4\\ -6\sigma+11\end{pmatrix} \equiv y=-2x+3 \quad (P_0\in r)$

$x+y-1=0 \rightsquigarrow 3\begin{pmatrix}\sigma\\ 1-\sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sigma-4\\ -3\sigma+5\end{pmatrix} \equiv x+y-1=0 \quad (P_0\in r)$

(d) $f(x)=Ax+b \rightsquigarrow Ax=f(x)-b \quad x=A^{-1}f(x)-A^{-1}b \quad f^{-1}(x)=Bx+c$

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{pmatrix} \qquad c=-A^{-1}b=-\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-4/3\\2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(x)=Bx+c=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$y=2x \rightsquigarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\delta\\2\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta/3+4/3\\2\delta/3-2/3\end{pmatrix} \equiv y=2x-\frac{10}{3}$$

$$y=2x+5 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\delta\\2\delta+5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta/3+4/3\\2\delta/3+1\end{pmatrix} \equiv y=2x-\frac{5}{3}$$

$$y=-2x+3 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\delta\\-2\delta+3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta/3+4/3\\-2\delta/3+1/3\end{pmatrix} \equiv y=-2x+3$$

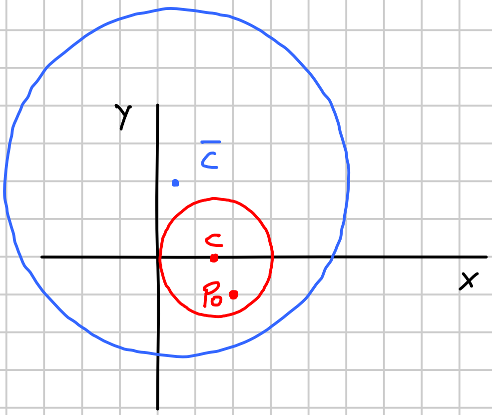
$$x+y-1=0 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\delta\\1-\delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta/3+4/3\\-\delta/3-1/3\end{pmatrix} \equiv x+y-1=0$$

(e) $x^2+y^2-3x=0 \quad \begin{cases}\bar{x}=3x-4\\ \bar{y}=3y+2\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{1}{3}\bar{x}+\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{3}\bar{y}-\frac{2}{3}\end{cases} \rightsquigarrow \frac{1}{9}(\bar{x}+4)^2+\frac{1}{9}(\bar{y}-2)^2-(\bar{x}+4)=0$

$\bar{x}^2+8\bar{x}+16+\bar{y}^2-4\bar{y}+4-9\bar{x}-36=0 \qquad \bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{x}-4\bar{y}-16=0$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \rightsquigarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0$

$$\begin{cases}x^2+y^2-3x=0 \rightsquigarrow x_0=\frac{3}{2} \quad y_0=0 \quad R=\frac{3}{2}\\ \bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{x}-4\bar{y}-16=0 \rightsquigarrow \bar{x}_0=\frac{1}{2} \quad \bar{y}_0=2 \quad \bar{R}^2=\frac{1}{4}+4+16=\frac{81}{4} \quad \bar{R}=\frac{9}{2}=3R\end{cases}$$



7. Scrivere l'espressione generale dell'omotetia di fattore λ rispetto al punto (x_0, y_0) e determinare i suoi punti fissi.

$$x \rightsquigarrow \lambda(x-P_0)+P_0 = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$f(x) = Ax+b \qquad A = \lambda I = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad b = (1-\lambda)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

P.TI FISSI $\quad f(x) = x \rightsquigarrow Ax+b = x \quad b = (1-\lambda)x \rightsquigarrow x = x_0$

8. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima l'omotetia di fattore 6 rispetto al punto $(3, 7)$ e poi l'omotetia di fattore $1/2$ rispetto al punto $(2, -5)$.

$$f_1(x) = A_1x+b_1 \qquad A_1 = 6I = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} \qquad b_1 = -5\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = A_2x+b_2 \qquad A_2 = \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} \qquad b_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix}$$

$$f_2\circ f_1 = f_2(f_1(x)) = A_2(A_1x+b_1)+b_2 = A_2A_1x + A_2b_1 + b_2 =$$

$$= Bx + C \qquad B = A_1A_2 = 3I = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad C = A_2b_1+b_2 = \begin{pmatrix}-\frac{15}{2}+1\\ -\frac{35}{2}-\frac{5}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{13}{2}\\ -20\end{pmatrix}$$

$f_2\circ f_1 \equiv$ OMOTETIA DI FATTORE 3 CON P.TO FISSO $= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-13/2\\ -20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/4\\ 10\end{pmatrix}$

VER. $\begin{cases} f_1(P_0) = 6\begin{pmatrix}13/4\\ 10\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{39}{2}-15\\ 60-35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9/2\\ 25\end{pmatrix} \\ f_2(f_1(P_0)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}9/2\\ 25\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9/4+1\\ 25/2-5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/4\\ 10\end{pmatrix} = P_0\end{cases}$