Sistemi Lineari 1

Argomenti: Studio di sistemi lineari **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: Algoritmo di Gauss (o sostituzione) e intepretazione dei suoi risultati

---

Studiare un sistema lineare significa determinare se non ha soluzioni, se ha soluzione unica (ed in tal caso trovarla), o se ha infinite soluzioni (ed in tal caso esprimerle in funzione di un numero opportuno di parametri).

Ciò premesso, studiare i seguenti sistemi lineari in 2 incognite:

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$ 4 $\begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases}$

5 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 7 $\begin{cases} 2y = x + 1 \\ x = 2y - 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x = y + 1 \\ 2y = x - y \\ 4y = 2x - 1 \end{cases}$

Studiare i seguenti sistemi lineari in 3 incognite:

9 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ 10 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$ 11 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ 13 $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ 14 $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 2 - y \\ x + 3y = 5 \\ 3z = x + 4 \end{cases}$

Studiare i seguenti sistemi lineari in 4 incognite:

15 $\begin{cases} -z + w = 3 \\ x + y - w = 1 \\ 2x + y + w = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$ 16 $\begin{cases} y - 2z - w = -7 \\ x + y + z = -2 \\ 2x + y + w = 3 \\ x - z + w = 5 \end{cases}$ 17 $\begin{cases} y + z + w = 0 \\ x + z + w = 1 \\ x + y + w = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ 18 $\begin{cases} y + w = 0 \\ y + z = w \\ x + z = 0 \\ x + 2w = 0 \end{cases}$

Studiare, al variare del parametro reale λ, i seguenti sistemi lineari in 2 incognite:

19 $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \end{cases}$ 20 $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ 21 $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ \lambda x + 2y = 1 \end{cases}$ 22 $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Studiare, al variare del parametro reale λ, i seguenti sistemi lineari in 3 incognite:

23 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 5 \end{cases}$ 24 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 1 \end{cases}$ 25 $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + \lambda z = 5 \end{cases}$ 26 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - y - 2z = \lambda \end{cases}$

Per acquisire sicurezza, non sarebbe male aver risolto ogni sistema precedente effettuando le operazioni in *almeno due modi diversi*.

SISTEMI LINEARI 1 - TEST 7

Studiare un sistema lineare significa determinare se non ha soluzioni, se ha soluzione unica (ed in tal caso trovarla) o se ha infinite soluzioni (ed in tal caso esprimerle in funzione di un numero opportuno di parametri).

1) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$ risolvendolo per sostituzione $\begin{cases} 14-4y-3y=5 \\ x=7-2y \end{cases}$

$\begin{cases} 7y=9 \quad y=\frac{9}{7} \\ x=7-\frac{18}{7}=\frac{31}{7} \end{cases}$ il sistema ha soluzione unica $(x,y)=\left(\frac{31}{7},\frac{9}{7}\right)$

risolvendolo con l'algoritmo di Gauss

$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{ricopio} \\ 2\cdot 2^{o}-1^{o} \end{matrix}$ $\begin{cases} 2x-3y=5 \Rightarrow x=31/7 \\ 7y=9 \Rightarrow y=9/7 \end{cases}$

2°) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=10 \end{cases}$ il sistema è impossibile perché a ~~sinistra~~ sx della 2° equazione c'è -2 volte la prima ma il termine noto (10) non è -2 volte (-10)

per sostituzione si avrebbe

$\begin{cases} x=\frac{3y+5}{2} \\ -6y-10+6y=10 \Rightarrow 0=20 \end{cases}$

Gauss

$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=10 \end{cases}$ $\begin{matrix} \rightarrow \text{ricopio} \\ 2\cdot 1^{o}+2^{o} \end{matrix}$ $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 0+0=20 \end{cases}$ sistema impossibile ridotto a scala ma c'è una riga con tutti zero tranne il termine a destra.

---

3) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases}$ la 2° equazione è uguale alla 1° moltiplicata per -2 il sistema ha infinite soluzioni

per sostituzione si ha dalla 1° $x=\frac{3y+5}{2}$

sostituendolo nella 2° $-2(3y+5)+6y=-10 \Rightarrow 0=0$

la 2° equazione è sempre soddisfatta purché lo sia la 1° il sistema ha infinite soluzioni che sono tutte le coppie (x,y) con $x=\frac{3y+5}{2}$ cioè sono tutte le coppie del tipo fissato un parametro (t) libero $y=t$ del tipo $\left(\frac{3t+5}{2}, t\right)$

infatti per $t=0$ si ha $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ che verifica OK

$t=1$ si ha $(4,1)$ verifica OK.

Gauss (matrice associata al sistema è:

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -10 \end{array}\right)$ ricopio la 1° $2\cdot 1°+2°$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 2° colonna è senza pivot

il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero $y=t$ (variabile che corrisponde alla colonna senza pivot) e sostituendo si ha $x=\frac{3t+5}{2}$

Soluzione generale $(x,y)=\left(\frac{3t+5}{2}, t\right)$

---

4) $\begin{cases} 2x=y-3 \\ 2y=6+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-3 \\ -4x+2y=6 \end{cases}$ come il n° 3 infinite soluzioni

matrice associata

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{2\cdot 1°+2°}{=} \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $y=t \Rightarrow 2x=t-3$ $x=\frac{t-3}{2}$

soluzione generale $(x,y)=\left(\frac{t-3}{2}, t\right)$

5) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=4 \\ x+2y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2-x \\ 2x+6-3x=4 \Rightarrow x=2 \\ x+4-2x=2 \Rightarrow x=2 \end{cases}$ $y=0$ $(x,y)=(2,0)$

Gauss

PIVOT

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot1^\circ-2^\circ} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^\circ-3^\circ} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^\circ-2^\circ} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tutte le colonne della matrice dei coefficienti ha un pivot ⇒ Sol. unica

$\begin{cases} x+y=2 \\ -y=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $x=2$, $y=0$ $\Rightarrow (x,y)\,(2,0)$

$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \\ x+2y=2 \end{cases}$ per sostituzione $y=2-x$

$2x+6-3x=5 \Rightarrow x=1$ impossibile

$x+4-2x=2 \Rightarrow x=2$

Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot1^\circ-2^\circ} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^\circ-3^\circ} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ-3^\circ} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

impossibile se c'è una riga con tutti zero eccetto il termine + a destra

$\begin{cases} x+y=2 \\ y=1 \\ 0=-1 \end{cases}$ $\boxed{\text{Non ci sono soluzioni}}$

---

7) $\begin{cases} 2y=x+1 \\ x=2y-1 \\ 2x-4y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \end{cases}$ la 1° e 2° equazione sono uguali

per sostituzione non ci sono soluzioni $\begin{cases} x=2y-1 \\ 4y-2-4y=2 \Rightarrow 0=4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ-2^\circ} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^\circ-2\cdot1^\circ} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Impossibile $\begin{cases} x-2y=1 \\ 0=4 \end{cases}$

8°) $\begin{cases} x = y+1 \\ 2y = x - y \\ 4y = 2x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2x + 4y = -1 \end{cases}$ Algoritmo Gauss $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & +3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{array}\right)$

$1° + 2°$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $3° + 2 \cdot 1°$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $3° - 2°$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Soluzione unica

$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y = 1 \end{cases}$ $x = \frac{3}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $X = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ altro modo di scrivere la soluzione

---

9) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ ricopio $2 \cdot 1° - 2°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $2° + 3°$

PIVOT

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ Soluzione unica $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(x, y, z) = (2, 0, 0)$ $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

10) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$ con gli stessi passaggi del 9 si ha $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3° colonna senza pivot il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero che sta nella variabile della colonna senza pivot che sarebbe z

pongo $z = t$ da cui $-y = -3t$ e $x + 3t + t = 2$ $x = 2 - 4t$

$(x, y, z) = (2 - 4t, 3t, t)$

11) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=3 \\ x+2y-2z=2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ con gli stessi passaggi del 9 [illegible] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

l'ultima riga ha tutti i coeff. uguali a zero tranne il termine noto sistema impossibile

$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+3z=0 \\ 0=1 \end{cases}$ sistema impossibile

---

scambio 2° con 3°

12) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=5 \\ x+2y-z=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$ $1°-2°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$4°-2°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $2°-1°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $4°-3°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y-3z=0 \\ -z=-4 \\ 0=7 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y-3z=0 \\ -z=-4 \\ z=3 \end{cases}$ sistema impossibile

---

13) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+y+3z=5 \\ x+2y-z=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $2°-3°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $3°-4°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $4°-1°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$4+2°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $2\cdot3°+4°$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ -y+4z=4 \\ -z=1 \\ 0=7 \end{cases}$ sistema impossibile.

14) $\begin{cases} y+z=3 \\ x+y-z=2-y \\ x+3y=5 \\ 3z=x+4 \end{cases}$ $\begin{cases} y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ x+3y \quad =5 \\ -x \quad +3z=4 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

---

esempio tratto da eserciziario di M. Abate

$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+2y+z=7 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$ $\begin{array}{c} P_1 \\ \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right| \end{array}$

$P_1 = a_{11}$ sommiamo all'equazione j-esima (per $j = 2 \ldots n$) la prima equazione moltiplicata per $-a_{j1}/P_1$ in questo modo sistemo la 1° colonna

$\begin{array}{c} \\ 1° \text{oper.} \rightarrow \\ 2° \text{oper.} \rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right|$ (P_2 = 1 della seconda riga)

1° colonna a posto

$1° \text{op} \quad -a_{21}/P_1 = -(-1)/1 = 1$

$2° \text{op} \quad -a_{31}/P_1 = -2/1 = -2$

adesso devo intervenire sulla seconda colonna far risultare 0 al posto di 3

$3° \text{op} \quad -a_{32}/P_2 = -3/1 = -3$

$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{array}\right|$ $\begin{array}{rl} x-y+2z=2 & \xrightarrow{3°} \\ y+3z=9 & \rightarrow 2° \\ -14z=-28 & \rightarrow 1° \end{array}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$

---

continuazione esercizio 14

scambio di righe

$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right|$ $\begin{array}{r} \\ \\ 1°+3° \\ -1°+4° \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right| \end{array}$ $\begin{array}{r} \\ \\ -2 \cdot 2°+3° \\ -2°+4 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$ (P_2 = 1 della seconda riga)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z = 3 \\ z = t \end{cases}$$

$z = t$ variabile libera

colonna senza pivot

$$\begin{cases} x + 6 - 2t - t = 2 \Rightarrow x = -4 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

---

15)
$$\begin{cases} -z + w = 3 \\ x + y - w = 1 \\ 2x + y + w = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

scambio di righe

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ -2 \cdot 1^\circ + 2 \\ \\ -1^\circ + 4^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ -2^\circ + 4^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ 3^\circ + 4^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - w = 1 \\ -y + 3w = -2 \\ -z + w = 3 \\ -w = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 11 \\ y = -16 \\ z = -9 \\ w = -6 \end{cases}$$

---

16)
$$\begin{cases} y - 2z - w = -7 \\ x + y + z = -2 \\ 2x + y + w = 3 \\ x - z + w = 5 \end{cases}$$

scambio le righe

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1^\circ + 3^\circ \\ -2 \cdot 1^\circ + 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ 2^\circ + 3^\circ \\ 2^\circ + 4^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

soluzioni infinite non c'è pivot nella 4° colonna $w = t$

parametro libero t è $= w$

$$\begin{cases} x + y + z = -2 & x = +7 - t/2 - 2 \Rightarrow x = 5 - t/2 \\ y - 2z + w = -7 & \Rightarrow y = t - t - 7 \quad y = -7 \\ -4z + 2w = 0 & \Rightarrow z = t/2 \\ w = t \end{cases}$$

La soluzione generale $(x, y, z, w) = \left(5 - \frac{t}{2}, -7, \frac{t}{2}, t\right)$

---

17) $$\begin{cases} y + z + w = 0 \\ x + z + w = 1 \\ x + y + w = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

cambio righe 1° con 2°

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 1°-3° \\ 1°-4° \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 2+3° \\ 2°+4° \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ 3°-2\cdot4° \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x + z + w = 1 \\ y + z + w = 0 \\ 2z + w = -1 \\ -3w = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ w = -1 \end{cases}$$

Soluzione generale

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

18) $$\begin{cases} y + w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

scambio righe 1° con 3°

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -1°+4° \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \\ \\ -2°+3° \\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ -3°+4° \end{array}\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$w = t$ parametro libero

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+z-w=0 \\ -z+2w=0 \\ w=t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x+2t=0 \\ y+2t-t=0 \\ -z+2t=0 \\ w=t \end{array}$$

Soluzione generale $(x,y,z,w)=(-2t,-t,2t,t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

19) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+2y=\lambda \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{array}\right)$ $-1^\circ+3\cdot2^\circ$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2+3\lambda \end{array}\right)$

$\begin{cases} 3x-y=2 \\ 7y=3\lambda-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\lambda+4}{7} \text{ (per sostituzione)} \\ y=\dfrac{3\lambda-2}{7} \end{cases}$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ ~~ci sono~~ c'è sempre un'unica soluzione.

---

20 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+\lambda y=1 \end{cases}$ per sostituzione $\begin{cases} x=\dfrac{y+2}{3} \\ \dfrac{y+2}{3}+\lambda y=1 \end{cases}$ $x=\dfrac{2\lambda+1}{3\lambda+1}$ $y=\dfrac{1}{3\lambda+1}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & +\lambda & 1 \end{array}\right)$ $-1^\circ+3\,2^\circ$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3\lambda+1 & 1 \end{array}\right)$

se $3\lambda+1=0$ sistema è impossibile cioè $\lambda=-1/3$ annullo il pivot

per altri valore di $\lambda \in \mathbb{R} \neq -1/3$ ~~ci sono~~ c'è una soluzione unica

---

21) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ \lambda x+2y=1 \end{cases}$ per sostituzione $\begin{array}{l} y=3x-2 \\ \lambda x+6x-4=1 \end{array}$ $\begin{cases} y=\dfrac{3-2\lambda}{\lambda+6} \\ x=\dfrac{5}{\lambda+6} \end{cases}$

$\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=-6$ sistema impossibile infatti

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $2\cdot1^\circ+2^\circ$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

per valori di $\lambda \neq -6$ il sistema ha sempre una soluzione.

22) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -1^\circ + 3 \cdot 2^\circ \\ -1^\circ \cdot \frac{2}{3} + 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3\lambda - 2 \\ 0 & -7/3 & 11/3 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\begin{array}{r} \\ \\ 2^\circ + 3 \cdot 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3\lambda - 2 \\ 0 & -0 & 3\lambda + 9 \end{array}\right)$ $3\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ il sistema ha soluzione unica $\left(\frac{1}{7}; -\frac{11}{7}\right)$

se $\lambda \neq -3$ il sistema è impossibile

---

23) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -1^\circ + 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda & 2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{r} \\ \\ 2^\circ + 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 6 \end{array}\right)$ se $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ sistema impossibile

se $\lambda \neq 1$ ~~sol~~ sistema ha una soluzione

---

24) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -1^\circ + 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{r} \\ \\ +2^\circ + 3^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2 \end{array}\right)$ $z = \frac{2}{\lambda + 1}$ se $\lambda = -1$ sistema impossibile

se $\lambda \neq -1$ sistema ha una soluzione

---

25) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + \lambda z = 5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & \lambda & 5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2 \cdot 1^\circ + 2^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & \lambda - 2 & -5 \end{array}\right)$

(?)

$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ -3y + (\lambda - 2)z = -5 \end{cases} \Rightarrow y = t \Rightarrow z = \frac{3t - 5}{\lambda - 2}$ se $\lambda = 2$ sistema impossibile

per $\lambda \neq 2$ infinite soluzioni parametro libero t

26) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - y - 2z = \lambda \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1^\circ+2^\circ \\ -1^\circ+3^\circ \\ -1^\circ+4^\circ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -2^\circ+3^\circ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda-1 \end{array}\right)$$

$z = 1$

$-3z = \lambda - 1 \Rightarrow z = \frac{1-\lambda}{3}$ per $z = 1$ si ha $\lambda = -2$

per $\lambda = -2$ si ha una soluzione per $\lambda \neq -2$ non si ha soluzione

per sostituzione si ha:

1° $x = 1 + y - z \longrightarrow$ $x = 1 + \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1/2}$

2° $1 + y - z + y + z = 2 \Rightarrow \boxed{y = 1/2}$

3° $1 + \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} + 2z = 3 \Rightarrow \boxed{z = 1}$

sostituisco i valori di x, y e z nella 4° e trovo $\lambda = -2$ ~~p~~ si ha una soluzione

Fine.