L'immersione di $W^{1,p}$ in L^{p^*} non è compatta.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato. Esibisco una successione $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ limitata che non ammette sottosuccessioni convergenti in $\mathrm{L}^{p^*}(\Omega)$.

(Step 1) Esistono una successione di punti $\{x_n\} \subset \Omega$ e una successione di numeri $\{r_n\} \subset \mathbb{R}$ tali che:

- le palle $B(x_n, r_n)$ sono contenute in Ω e sono a due a due disgiunte;
- $r_n \to 0$.

(Step 2) Data $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$ tale che $||\nabla\varphi||_{\mathrm{L}^p}^p = 1$ (non serve davvero), pongo

$$u_n(x) = \lambda_n \varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)$$

dove $\lambda_n = r_n^{\frac{p-d}{p}}$. In questo modo ottengo

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right|_{\mathrm{L}^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial(\lambda_n\varphi(t_n(x)))}{\partial x_i}\right|^p dx \qquad\qquad \text{dove } t_n(x) = \frac{x - x_n}{r_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\lambda_n \frac{\partial\varphi(t_n(x))}{\partial x_i}\frac{1}{r_n}\right|^p dx \\
&= \int_{B(0,1)} \left|\lambda_n \frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i}\frac{1}{r_n}\right|^p r_n^d \, dy \qquad \text{sostituendo } y = t_n(x) \\
&= \frac{\lambda_n^p}{r_n^{p-d}} \int_{B(0,1)} \left|\frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i}\right|^p dy \\
&= \frac{\lambda_n^p}{r_n^{p-d}} \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\right|_{\mathrm{L}^p}^p.
\end{aligned}$$

Perciò, per le assunzioni su φ e λ_n, abbiamo che per ogni n

$$||\nabla u_n||_{\mathrm{L}^p}^p = \frac{\lambda_n^p}{r_n^{p-d}} ||\nabla\varphi||_{\mathrm{L}^p}^p = 1.$$

(Step 3) $\{u_n\}$ è limitata in L^q con $q \leq p^*$. Inoltre, per $q < p^*$ converge a 0 in norma L^q.

Per $q \leq p^*$ vale l'uguaglianza $||u_n||_{\mathrm{L}^q}^q = r_n^{\alpha(q)} ||\varphi||_{\mathrm{L}^q}^q$, dove $\alpha(q) = d - \frac{q(d-p)}{p}$. Infatti

$$\begin{aligned}
||u_n||_{\mathrm{L}^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_n^q \left|\varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)\right|^q dx \\
&= \int_{B(0,1)} \lambda_n^q \, |\varphi(y)|^q \; r_n^d \, dy \qquad\qquad \text{sostituendo } y = \frac{x - x_n}{r_n} \\
&= \left(r_n^{\frac{p-d}{p}}\right)^q r_n^d \; ||\varphi||_{\mathrm{L}^q}^q = r_n^{d - \frac{q(d-p)}{p}} \; ||\varphi||_{\mathrm{L}^q}^q.
\end{aligned}$$

Ci sono due casi.

Se $q < p^*$, allora $\alpha(q) > 0$. Di conseguenza $||u_n||^q_{\mathrm{L}^q} = r_n^{\alpha(q)} ||\varphi||^q_{\mathrm{L}^q} \to 0$ poiché $r_n \to 0$.

Se $q = p^*$, allora $\alpha(q) = 0$. Di conseguenza $||u_n||^q_{\mathrm{L}^q} = ||\varphi||^q_{\mathrm{L}^q}$.

(Step 4) $\{u_n\}$ è limitata in $W^{1,p}$, ma non ammette sottosuccessioni convergenti in L^{p^*}.

Infatti, $||u_n||_{1,p,\Omega} = ||u_n||_{\mathrm{L}^p} + ||\nabla u_n||_{\mathrm{L}^p} < M$ poiché convergente + limitata.

Invece $||u_n||_{\mathrm{L}^{p^*}} = K$ è costante. Mostriamo che questo implica l'assenza di sottosuccessioni convergenti, e dunque di sottosuccessioni di Cauchy. Dato che i supporti delle u_n sono disgiunti, otteniamo che

$$||u_n - u_m||^{p^*}_{\mathrm{L}^{p^*}} = ||u_n||^{p^*}_{\mathrm{L}^{p^*}} + ||u_m||^{p^*}_{\mathrm{L}^{p^*}} = 2K > 0.$$