Rette nel piano 3

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Descrizione cartesiana e parametrica di rette, prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Sono dati una retta r (in vari modi) ed un punto (x_0, y_0). Si chiede di determinare l'equazione della parallela e della perpendicolare ad r passanti per (x_0, y_0), e della perpendicolare ad r passante per l'origine. Fornire la risposta nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

	Retta r	(x_0, y_0)	Parallela	Perpendicolare	Perpend. origine
1	$y = 2x$	$(1, 1)$	$y = 2x - 1$	$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$	$y = -\frac{x}{2}$
2	$2x + y = 3$	$(1, 1)$	$y = -2x + 3$	$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$y = \frac{x}{2}$
3	$x = -7$	$(2, 3)$	$x = 2$	$y = 3$	$y = 0$
4	$4 - y = 0$	$(-3, 2)$	$y = 2$	$x = -3$	$x = 0$
5	$(2, 3) + t(-1, -1)$	$(5, 5)$	$y = x$	$y = -x + 10$	$y = -x$
6	$(3 + t, 2t + 5)$	$(-2, 1)$	$y = 2x + 5$	$y = -\frac{x}{2}$	$y = -\frac{x}{2}$
7	$(1, 1) - t(2, 0)$	$(3, -4)$	$y = -4$	$x = 3$	$x = 0$
8	$(t, t + 1)$	$(-1, 0)$	$y = x + 1$	$y = -x - 1$	$y = -x$

Sono dati un punto (x_0, y_0), un angolo θ (espresso talvolta in gradi sessagesimali, talvolta in radianti), ed una retta r (in vari modi).

Si chiede di determinare la retta r_1 passante per (x_0, y_0) che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x, e le rette r_2 ed r_3 che passano per (x_0, y_0) e formano un angolo θ con la retta data r. Fornire le risposte nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

	(x_0, y_0)	θ	Retta r	Retta r_1	Rette r_2 ed r_3
9	$(-1, 0)$	$45°$	$x + y = 7$		LE SOLUZIONI
10	$(1, 0)$	$45°$	$x + 2y = 7$		COINCIDONO
11	$(2, 3)$	$-\pi/3$	$x = 4$		CON QUELLE GIÀ
12	$(2, 3)$	$\pi/3$	$2x + y = 3$		SEGNALATE
13	$(2, -1)$	$30°$	$(1, 1) + t(3, 4)$		DA LorQ.
14	$(0, 0)$	$-\pi/4$	$(-t, 3t)$		
15	$(0, 1)$	$\arccos(1/3)$	$3x + y = 1$		
16	$(5, 3)$	$\arctan(1/2)$	$(2t + 1, -t + 4)$		
17	$(3, -1)$	$\arccos(-1/3)$	$(2t - 1, t)$		

RETTE NEL PIANO 3 - TEST 4

1] $r:\ y = 2x$ $\quad P(1,1)$

retta // (ad r) passante per P sarà del tipo $y = mx + n$ con m lo stesso di r

cioè sarà $y = 2x + n$ impongo di passare per $(1,1)$

$1 = 2 + n \Rightarrow n = -1$ cioè $\boxed{y = 2x - 1}$

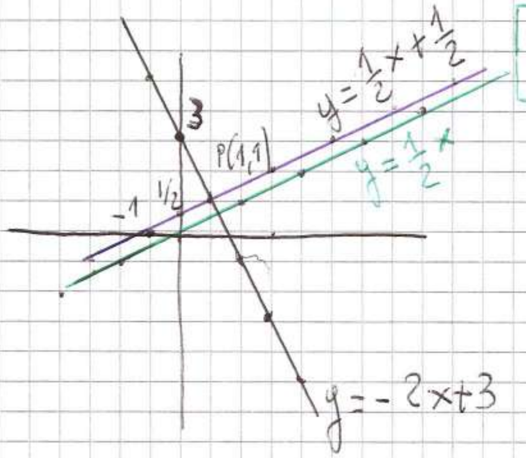
retta $\perp$ (ad r) passante per $P(1,1)$ con $m = -\frac{1}{m}$ di r

$y = -\frac{1}{2}x + n$ $\quad 1 = -\frac{1}{2} + n$ $\quad n = \frac{3}{2}$ cioè $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

$\perp$ a r passante per $(0,0)$ $\quad \boxed{y = -\frac{1}{2}x}$

2] $r:\ 2x + y = 3$ $\quad P(1,1)$

$y = -2x + 3$ $\quad y = -2x + n \Rightarrow 1 = -2 + n \Rightarrow n = 3$

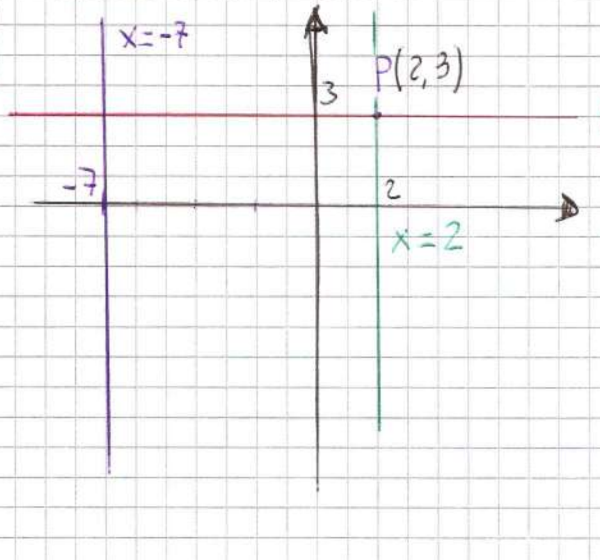


$\boxed{y = -2x + 3}$

$y = \frac{1}{2}x + n$ $\quad 1 = \frac{1}{2} + n \Rightarrow n = \frac{1}{2}$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{y = \frac{1}{2}x}$

3]

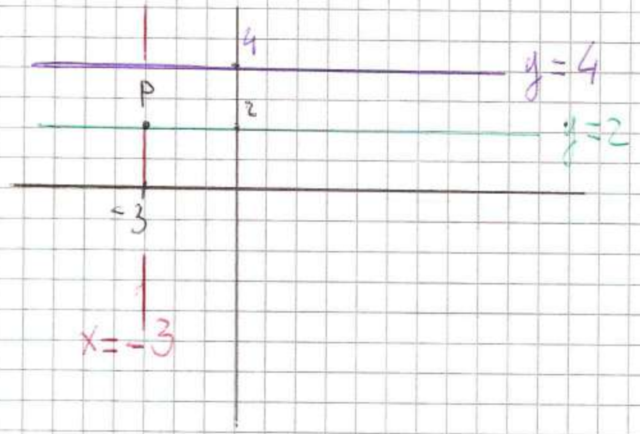


$\boxed{x = 2}$

$\boxed{y = 3}$

$\boxed{y = 0}$

4] $4-y=0$ $(-3,2)$ $y=4$



$\boxed{y=2}$

$\boxed{x=-3}$

$\boxed{x=0}$

5] $(2,3)+t(-1,-1)$ $P(5,5)$ $\frac{d}{c}=\frac{-1}{-1}=1=$ coeff. ang.

retta // del tipo $y=x+n$ per $P(5,5)$ $5=5+n \Rightarrow n=0$

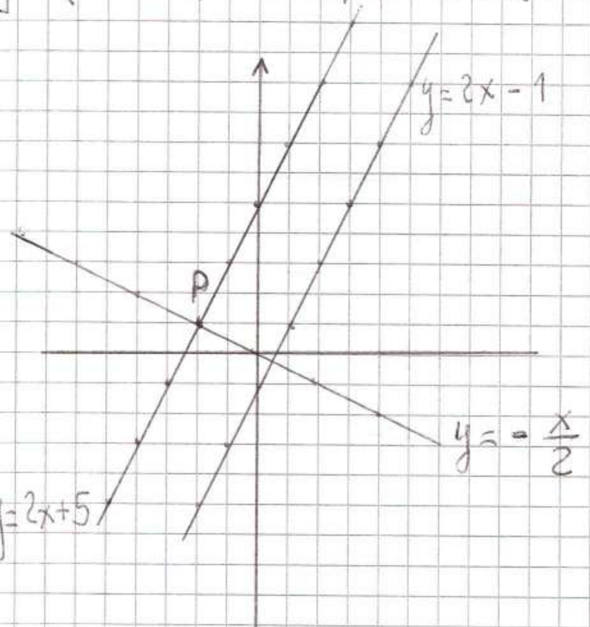
retta // passante per $(5,5)$ è $\boxed{y=x}$

retta ⊥ del tipo $y=-x+n$ per $P(5,5)$ $5=-5+n$ $n=10$

retta ⊥ passante per $(5,5)$ è $\boxed{y=-x+10}$

⊥ passante per l'origine è $\boxed{y=-x}$

6] $r=(3+t,\ 2t+5)$ $P(-2,1)$ la parametrica si può scrivere come $(\underbrace{3,5}_{a,b})+t(\underbrace{1,2}_{c,d})$



coeff ang $=\frac{d}{c}=2$

retta // del tipo $y=2x+n$ impongo passa da $(-2,1)$ $1=-4+n$ $n=5$

$\boxed{y=2x+5}$

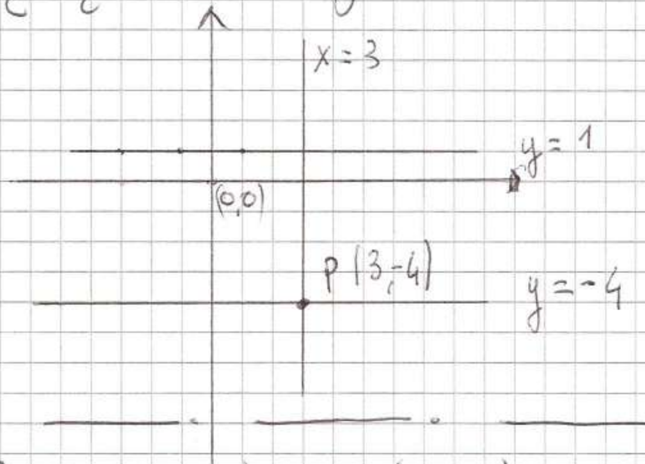
retta ⊥ del tipo $y=-\frac{x}{2}+n$ passa $(-2,1)$

$1=-1+n \Rightarrow n=0$

$\boxed{y=-\frac{x}{2}}$ $\boxed{y=-\frac{x}{2}}$

7] $(1,1)-t(2,0)$ $P(3,-4)$

$\frac{d}{c}=\frac{0}{2}=0$ coeff. ang.



$\boxed{y=-4}$

$\boxed{x=3}$

$\boxed{x=0}$

8] $(t, t+1)$ $P(-1,0)$

la parametrica si può scrivere come: $(0,1)+t(1,1)$

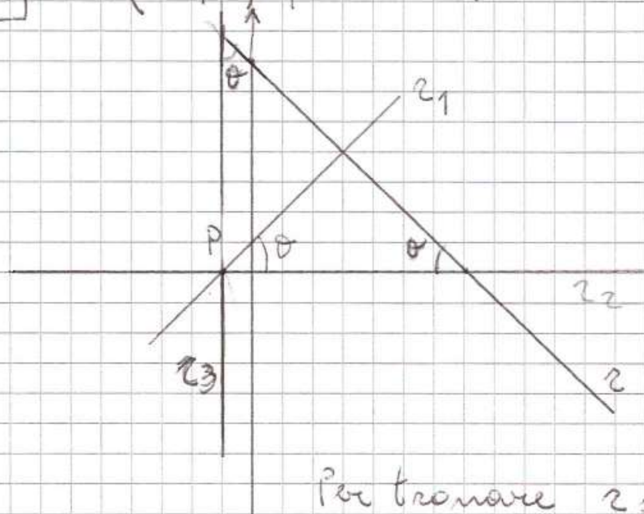
coeff ang $=1$ retta // del tipo $y=x+n$ $0=-1+n$ $n=1$

retta // passante per $(-1,0)$ $\boxed{y=x+1}$

retta ⊥ passante per $(-1,0)$ $y=-x+n$ $0=1+n$ $n=-1$

$\boxed{y=-x-1}$ $\boxed{y=-x}$

9] $P(-1,0)$; $\theta=45°$ $r=x+y=7$ $y=-x+7$



Graficamente le risposte sono:

$r1=\boxed{y=x+1}$

$r2=\boxed{y=0}$

$r3=\boxed{x=-1}$

Per trovare $\underline{r_1}$ sapendo θ, la $tg\,\theta$ è = coeff ang.
con $\theta=45°$ si ha $\tan 45°=1$

la retta generica è $y=x+n$ deve passare per $P(-1,0)$
sostituisco $0=-1+n$ da cui $n=1$ da cui $r_1=y=x+1$

Per trovare r_2 e r_3 che passano da P e formano un angolo θ con r.
trovare il vettore direzione della retta r $x+y-7$ un
vettore direzione è $(-b, a) \Rightarrow (-1, 1)$
trovo la retta passante per P con m generico

$$y - y_P = m(x - x_P) \qquad y - 0 = m(x+1) \qquad y = mx + m$$

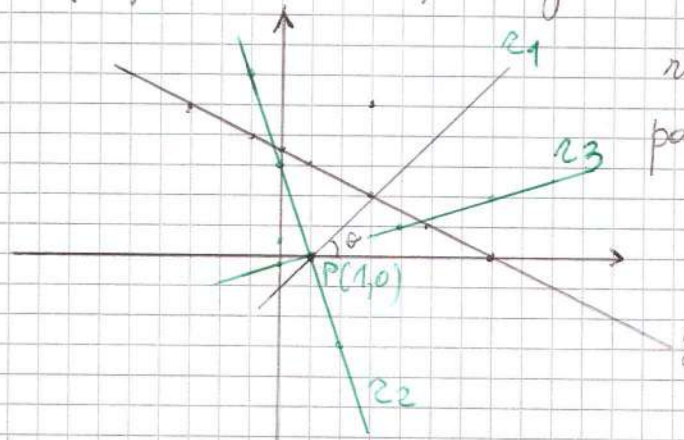
$mx - y + m = 0$ vettore direzione $(1, m)$

sapendo che il coseno tra 2 vettori è

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \qquad \cos 45° = \frac{\langle (-1,1)(1,m) \rangle}{|(-1,1)| \cdot |(1,m)|}$$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . . . . si dovrebbe ricavare $m = 0$ e $m = -1$
per $m = 0$ si ha $y = 0$ ma $x = -1$ non si può rappresentare in questa modalità. (?)

10] $P(1,0)$, $\theta = 45°$ r) $x + 2y = 7 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$



retta generica $y = x + n$ impongo passi per $P(1,0)$ $\quad 0 = 1 + n \quad n = -1$

$$\boxed{r_1 = y = x - 1}$$

$x + 2y - 7 = 0$ vettore direzione $(-b, a) \Rightarrow (-2, 1)$

retta passante per $P(1,0)$ con generico m

$$y - y_P = m(x - x_P) \qquad y - 0 = m(x-1) \qquad mx - y - m \Rightarrow (1, m) \text{ vett. dir.}$$

$$y = mx - m$$

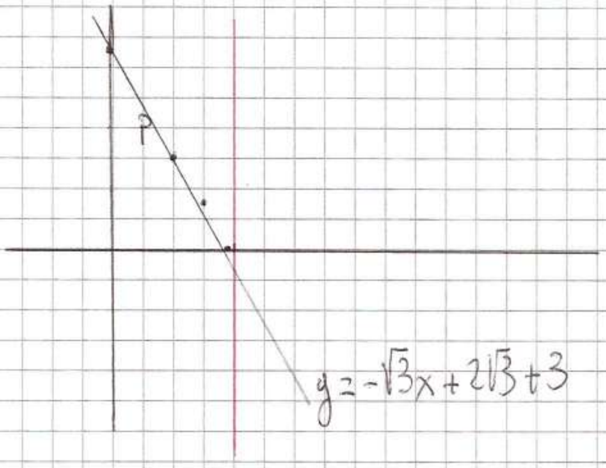
$$\langle (-2,1)(1,m) \rangle = |(-2,1)(1,m)| \cdot \cos 45° =$$

$$\boxed{r_2 \Rightarrow y = -3x + 3}$$
$$\boxed{r_3 \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$m - 2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \quad \frac{2(m-2)}{\sqrt{10}} = \sqrt{1+m^2}$$

$3m^2 + 8m - 3 = 0$ da cui si ha $m_1 = -3$ $m_2 = 1/3$

11) $P(2,3)$ $\theta = -\pi/3$ $r: \; x = 4$



Trovo r1 sapendo che $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

si ha $y = -\sqrt{3}x + n$ passa per $(2,3)$

$3 = -2\sqrt{3} + n \qquad n = 2\sqrt{3} + 3$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 3}$$

formula retta passante per un punto $P(x_P, y_P)$ $\boxed{y - y_P = m(x - x_P)}$

la dimostrazione sappiamo che la retta in forma esplicita

è $y = mx + q$ imponiamo che passa per P si ha $y_P = m x_P + q$

ricavo $q = y_P - m x_P \Rightarrow$ sostituisco nella forma esplicita

$$y = mx + y_P - m x_P \Rightarrow \boxed{y - y_P = m(x - x_P)}$$

vettore direzione retta r scrivo e in forma parametrica

$x - 4 = 0 \quad (-b, a) \Rightarrow (0,1)$ $\qquad (4,0) + t(0,1)$

retta generica che passa per $(2,3)$ $\quad y - 3 = mx - 2m$

cioè $mx - y + 3 - 2m = 0$ vettore direzione $(-b, a) \Rightarrow (1, m)$

$$\langle (0,1)(1,m) \rangle = |(0,1)| \cdot |(1,m)| \cdot \frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$2m = \sqrt{1 + m^2} \quad \begin{cases} m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{r_2 \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{r_3 \Rightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

12 $P(2,3)$ $\vartheta = \frac{\pi}{3}$; r $2x+y=3$

$r_1)$ $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x + n$ deve passare da $(2,3)$

$3 = 2\sqrt{3} + n \Rightarrow n = 3 - 2\sqrt{3}$

$\boxed{y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 3 \quad r_1}$

trovare vettore direzione di r $2x+y-3=0$ $(-b,a) \Rightarrow (-1,2)$

retta generica passante per $(2,3)$ $y-3 = m(x-2)$

$mx - y + 3 - 2m = 0$ $(-b,a) \Rightarrow (1,m)$

i 2 vettori direzione $(-1,2)$ $(1,m)$

$<(-1,2)(1,m)> = |(-1,2)| \cdot |(1,m)| = \cos\frac{\pi}{3}$

$-1 + 2m = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}(-1+2m) = \sqrt{1+m^2}$

$11m^2 - 16m - 1 = 0$ $m_{12} = \frac{+8 \pm \sqrt{75}}{11} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}$

$y = mx + 3 - 2m$

r_2 $y = \frac{8+5\sqrt{3}}{11} \cdot x + 3 - \frac{(16+10\sqrt{3})}{11}$

r_3 $y = \frac{8-5\sqrt{3}}{11} \cdot x + 3 - \frac{(16-10\sqrt{3})}{11}$

---

13 $P(2,-1)$ $\vartheta = 30°$ r $(1,1) + t(3,4)$

$tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$ passa da $(2,-1)$ $-1 = \frac{\sqrt{3}}{3}2 + n$

$n = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ $\boxed{r_1 \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}$

vettore direzione di r $(3,4)$

Fascio di rette passanti per $(2,-1)$ $y+1 = m(x-2)$,

$mx - y - 1 - 2m = 0$ vettore direzione $(-b,a) \Rightarrow (1,m)$

$(3,4)\ ,\ (1,m)\ ;\quad \langle(3,4)(1,m)\rangle = |(3,4)|\cdot|(1,m)| = \cos 30^\circ$

$$3+4m = 5\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \implies 11m^2-96m+39=0$$

$$m_{12} = \frac{+48\pm 25\sqrt{3}}{11}$$

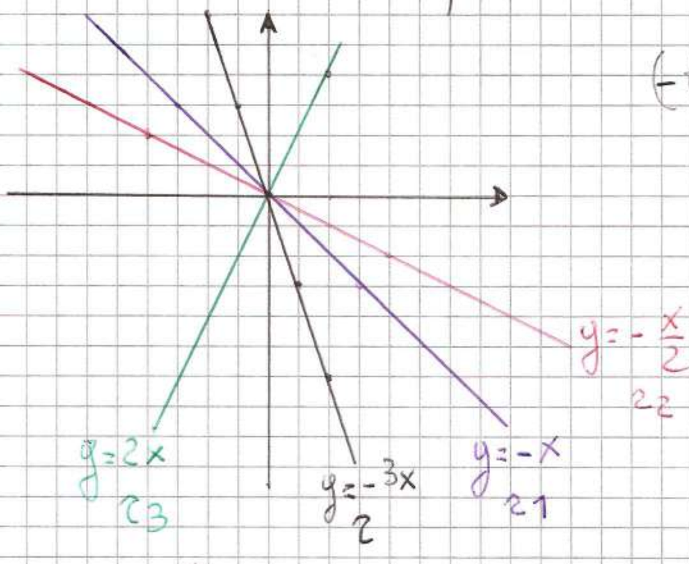
$y = mx-1-2m$

$r_2)$ $\boxed{y = \frac{48+25\sqrt{3}}{11}\cdot x - 1 - \left(\frac{96+50\sqrt{3}}{11}\right)}$

$r_3)$ $\boxed{y = \frac{48-25\sqrt{3}}{11}x - 1 - \left(\frac{96-50\sqrt{3}}{11}\right)}$

---

14 $\theta = -\pi/4 \quad P(0,0) \quad r\ (-t,3t)$



$(-t,3t) = (0,0)+t(-1,3) \implies y=-3x$

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad r_1 \Rightarrow y=-x+n$

se passa per $(0,0) \implies n=0$

$\boxed{r_1 \Rightarrow y=-x}$

fascio di rette generico passante per $(0,0) \Rightarrow y=mx \quad (-b,a) \Rightarrow (1,m)$

$(-1,3)\ (1,m) \quad \langle(-1,3)(1,m)\rangle = |(-1,3)|\cdot|(1,m)|\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$-1+3m = \cancel{\sqrt{10}}^{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \implies 4m^2-6m-4=0$$

$m_{12} \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ retta generica è $y=mx$

$\boxed{r_2 = y = -\frac{x}{2}} \qquad \boxed{r_3 = y = 2x}$

15 $P(0,1)$ $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ r $3x+y=1$

r_1:) devo trovare la $tg\,\theta$; $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$ equaz. r_1 $y = 2\sqrt{2}\,x + n$

deve passare da $P(0,1) \Rightarrow 1 = n$ $\boxed{r_1)\ y = 2\sqrt{2}\,x + 1}$

un vettore "direzione" di r $(3x+y-1=0)$ è $(-b,a) \Rightarrow (-1,3)$

fascio di rette passanti per $P(0,1)$ è $y-1 = mx \Rightarrow mx - y + 1 = 0$

un vettore "direzione" $(-b,a) \Rightarrow (1,m)$

$(-1,3)$ e $(1,m)$

$<(-1,3)(1,m)> = |(-1,3)|\cdot|(1,m)|\cdot\frac{1}{3}$; $-1+3m = \sqrt{10}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{1}{3}$

$71m^2 - 54m - 1 = 0$ $m_{12} = \frac{+27 \pm \sqrt{800}}{71}$ $\frac{27+20\sqrt{2}}{71}$; $\frac{27-20\sqrt{2}}{71}$

$y = mx+1$

$r_2 \Rightarrow$ $\boxed{y = \left(\frac{27-20\sqrt{2}}{71}\right)x + 1}$

$r_3 \Rightarrow$ $\boxed{y = \left(\frac{27+20\sqrt{2}}{71}\right)x + 1}$

---

16 $P(5,3)$ $\arctan(1/2) = \theta$ r $(2t+1, -t+4)$

$tg\,\theta = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + n$ impongo che deve passare per $(5,3)$ e trovo n

$3 = \frac{5}{2} + n$ $n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{r_1\ \ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

$tg^2\theta = \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}$ $tg^2\theta = \frac{1-cos^2\theta}{cos^2\theta}$ $tg^2\theta \cdot cos^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$tg^2\theta \cdot cos^2\theta + cos^2\theta = 1$ $cos^2\theta(1+tg^2\theta) = 1$

$cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\theta}}$; dato $tg\theta = \frac{1}{2}$

$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

retta r $(2t+1, -t+4) = (1,4) + t(2,-1)$ $(2,-1)$ un vettore direzione

retta (fascio) passante per $P(5,3)$; $y-3 = m(x-5)$;

$mx - y - 5m + 3 = 0$ $(-b, a)$ vett. dir. $\Rightarrow (1, m)$

dati $(2,-1)$, $(1,m)$ e $cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$<(2,-1)(1,m)> = \|(2,-1)\| \cdot \|(1,m)\| \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$2 - m = \cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \Rightarrow 3m^2 + 4m = 0$

$m(3m+4) = 0$

- $m = 0 \Rightarrow r_2 \Rightarrow \boxed{y = 3}$
- $m = -\frac{4}{3} \Rightarrow r_3 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}}$

$\boxed{17}$ $P(3,-1)$ $arccos(-1/3)$ r) $(2t-1, t)$

$cos\theta = -\frac{1}{3}$ $sen\theta = \sqrt{1-cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $tg\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{1}}\right) = -2\sqrt{2}$

$y = -2\sqrt{2}x + n$ impongo passa per $(3,-1)$ $-1 = -6\sqrt{2} + n$

$n = 6\sqrt{2} - 1$ r_1 $\boxed{y = -2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2} - 1}$

$(2t-1, t) = (-1,0) + t(2,1)$ $\qquad (2,1)$ vett. dir.

$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (\underset{x_0}{3}, \underset{y_0}{-1}) \qquad mx - y - 3m - 1 = 0 \qquad (1, m)$ vett. dir.

$(2,1), \; (1, m) \qquad \cos\theta = -\frac{1}{3}$

$$\langle (2,1)(1,m) \rangle = |(2,1)| \cdot |(1,m)| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$2 + m = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2} \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4m^2 + 36m + 31 = 0$$

$$m_{1,2} = -\frac{18 \pm \sqrt{200}}{4} \quad \begin{cases} -\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{cases} \qquad y = mx - 1 - 3m$$

$$\boxed{r_2) \quad y = \left(-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)x - 1 + \frac{27}{2} - \frac{15}{2}\sqrt{2}}$$

$$\boxed{r_3) \quad y = \left(-\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)x - 1 + \frac{27}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{2}}$$

FINE