Siano date le seguenti serie di funzioni. Per ciascuna di esse si determini

1. l'insieme A degli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge puntualmente.
2. se la serie converge uniformemente sui due insiemi dati B_1 e B_2.
3. il limite della somma della serie per x che tende ad un punto indicato (talvolta il limite può essere a sua volta la somma di una serie di numeri).

*** Esercizio 6 (*Ghisi, Gobbino: Esercizi di Analisi Matematica 2*)

Siano dati :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1 + nx^{4n}}, \qquad \text{gli insiemi } B_1 = (2, +\infty) \quad \text{e} \quad B_2 = (0, 1) \quad \text{ed il punto } x = +\infty$$

Determinare quanto sopra richiesto.

Soluzione dell'esercizio 6

1. Per $x \geq 0$ ho convergenza puntuale su $[0, 1) \cup (1, +\infty)$. Infatti, per il termine generale della serie abbiamo che

   $$0 \leq x < 1 \implies \frac{nx^n}{1 + nx^{4n}} \leq nx^n$$

   che converge perché serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$

   $$x > 1 \implies \frac{nx^n}{1 + nx^{4n}} \leq \left(\frac{1}{x^3}\right)^n$$

   che converge perché serie geometrica con ragione < 1

   $$x = 1 \implies \frac{n}{1 + n}$$

   che diverge a $+\infty$ dal momento che tende ad $1 \neq 0$ per $n \to +\infty$

   Per $x \leq 0$ la serie diventa

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1 + nx^{4n}} \qquad \text{studiata per } x \geq 0$$

   da cui segue che la serie converge assolutamente su $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$

   Riassumendo, si ha convergenza puntuale sull'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

2. Sull'insieme B_1 si ha convergenza totale della serie di funzioni data. Infatti, abbiamo che

   $$f_n'(x) = \frac{n^2x^{n-1}(1 + nx^{4n}) - 4n^2x^{4n-1}(nx^n)}{(1 + nx^{4n})^2} \geq 0 \iff 1 - 3nx^{4n} \geq 0 \iff 1 - \sqrt{3n}x^{2n} \geq 0$$

   Dunque, considerando i soli $x \geq 0$, $f_n(x)$ presenta un punto di max in corrispondenza di

   $$x = \sqrt[2n]{\frac{1}{\sqrt{3n}}}$$

   che risulta compreso tra 0 ed 1 al variare di n. Dunque, per $x > 2$, $f_n(x)$ risulta sicuramente monotona decrescente, da cui segue che

   $$M_n = \sup\{|f_n(x)| : x > 2\} = \frac{n2^n}{1 + n2^{4n}} \implies \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

Sull'insieme B_2 invece, si ha che

$$M_n = \sup\{|f_n(x)| : 0 < x < 1\} = \frac{n/\sqrt[4]{3n}}{1+1/3} = \frac{3n}{4\sqrt[4]{3n}}$$

Quindi, poiché si ha

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$$

viene meno la condizione necessaria per la convergenza uniforme e su $B_1 = (0,1)$ si ha solo convergenza puntuale.

3. Poiché per $x > 2$ si ha convergenza uniforme, possiamo applicare i teoremi di scambio, ottenendo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$