dalla lezione 12 (2019.2020)

Studiare il limite debole di $\sqrt{n}\sin(nx) =: g_n$.

Non è limitata, perciò non è sufficiente studiare la convergenza di $\langle g_n, f\rangle$ dove $f \in W$ e $\mathrm{Span}(W)$ è denso (ad esempio $W = \{\sin(mx) : m \in \mathbb{N}\}$).

Affermo che il limite debole è 0.

$$\langle g_n, f\rangle_{L^2} = \int_0^\pi g_n(x) f(x)\, dx \qquad \int Gf = [GF] - \int gF$$

$$\text{(!)} = \int_0^\pi -g_n'(x) F(x)\, dx + \cancel{\left[g_n(x) F(x) \right]_{x=0}^{x=\pi}}$$

$$\text{(!!)} = \int_0^\pi g_n''(x) FF(x)\, dx - \left[g_n'(x) FF(x) \right]_{x=0}^{x=\pi} \qquad (\star)$$

dove $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ e $FF(x) = \int_0^x F(t)\, dt$. Motivo passaggi:

(!) per int. per parti e $g_n(0) = g_n(\pi) = 0$;

(!!) per int. per parti.

Inoltre $f(x)$ e $F(x)$ sono integrabili: f poiché $L^2(0,\pi) \subseteq L^1(0,\pi)$ e $F \in L^2(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi |F(x)|^2 dx = \int_0^\pi \left| \int_0^x f(t)\, dt \right|^2 dx \overset{\text{Jensen}}{\leq} \int_0^\pi \int_0^x |f(t)|^2 dt\, dx$$

$$\leq \int_0^\pi \int_0^\pi |f(t)|^2 dt \leq \pi \int_0^\pi |f(t)|^2 dt < \infty$$

poiché $f \in L^2(0,\pi)$. Allo stesso $FF \in L^2(0,\pi)$.

Tornando a $(\star)$, trovo

$$\int_0^\pi \sqrt{n}\sin(nx) f(x)\, dx = \underbrace{-\int_0^\pi \frac{1}{n\sqrt{n}} \sin(nx) FF(x)\, dx}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left[\cos(nx) FF(x) \right]_0^\pi}_{\mathrm{II}}$$

Concludo che il limite $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sqrt{n}\sin(nx) f(x)\, dx = \langle g_n, f\rangle$

$= 0$ per ogni $f \in L^2$ poichè $I \to 0$, dal momento che $\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}$ è un sistema ortogonale limitato il cui span è un denso e $FF \in L^2(0,\pi)$; mentre

$$\underline{\mathrm{II}} = \left((-1)^n - 1 \right) \cdot \pi \int_0^\pi |f(t)|\, dt \in \mathbb{R}$$

perciò $\frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\mathrm{II}} \to 0$.