dal foglio di esercizi 19.

$$\min \left\{ \int_0^2 \dot{u}^2 - 7u \, dx \; : \; u \in C^1([0,2]),\, u(0)=3,\, \dot{u}(1)=3 \right\}$$

Affermo che il minimo esiste e che esiste un unico pto di minimo.

POI HO CAMBIATO IDEA.

Posto $X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0)=3,\, \dot{u}(1)=3 \}$, lo spazio v. associato è $V = \{ v \in C^1([0,2]) : v(0)=0,\, v'(1)=0 \}$.

Calcolo la variazione prima: data $v \in V$, $u \in X$, $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^2 (\dot{u}+t\dot{v})^2 - 7(u+tv)\, dx$$

$$= F(u) + t \int_0^2 (2\dot{u}\dot{v} - 7v)\, dx + \int_0^2 t^2 \dot{v}^2 \, dx$$

$$\delta F(u,v) = \varphi'(0) = \int_0^2 (2\dot{u}\dot{v} - 7v)\, dx .$$

Un passaggio da motivare a posteriori:

$$\delta F(u,v) \overset{(!)}{=} \int_0^2 (-2\ddot{u} - 7)v \, dx + \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0)$$

$$= \int_0^2 (-2\ddot{u} - 7)v\, dx + \dot{u}(2)v(2)$$

Affermo che la classe $\{ v \in C_c^\infty(0,2) : v'(1)=0 \} \subseteq V$ è sufficiente per innescare il LFCV. Perciò se $u$ è DLM, allora $u$ risolve

$$\begin{cases} \ddot{u} = -7/2 \\ \dot{u}(1) = 3 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzione unica pari a

$$u_0(x) = -\frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x + 3 .$$

Poiché è $C^\infty$, ho la regolarità sufficiente per l'uguaglianza (!), dunque NON FUNZIONA per cui quando calcolo $\delta F(u_0, v)$ ottengo

$$\int_0^2 (-2\ddot{u}_0 - 7)\,dx + \dot{u}_0(2)v(2) = \dot{u}_0(2)v(2) \neq 0$$

se $v(2) \neq 0$. Quindi $u_0$ non è DLM.

Inoltre se mi restringo a studiare il pbm su $[1,2]$ trovo che $u$ deve risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = -7/2 \\ \dot{u}(1) = 3 \\ \dot{u}(2) = 0 \quad \text{(NBC on the road)} \\ \\ u(1) = u_0(1) \end{cases}$$

dove l'ultima condizione serve affinchè la funzione sia $C^1$ su tutto $[0,2]$. Questo sistema non ha soluzioni poichè la candidata soluzione $u_1(x) = -\frac{7}{4}x^2 + ax + b$ deve soddisfare contemporaneamente

$$\dot{u}(1) = -\frac{7}{2} + a = 3, \quad \dot{u}(2) = -7 + a = 0. \quad \lightning$$

Non sono riuscita a trovare un controesempio poichè la condizione $u(0)=3$ "vincola" la soluzione a partire da 3. Il controes. che cerco è una funzione che assume valori molto grandi, così che $-7u$ sia molto piccolo, ma con derivata "piccola". Tuttavia, se $u(0)=3$, la derivata deve essere molto grande.

Help.