$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \operatorname{artg}\frac{1}{x}}$$

$\underline{\int_0^1 f(x)\,dx:}$ e' un integrale proprio

in $[0,1]$ la zona di integrazione e' limitata e lo e' anche la funzione:

$$-1 - \frac{\pi}{2} < f(x) < 1 + \frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi+2}{2} < f(x) < \frac{\pi+2}{2}$$

Dunque la funzione in $[0,1]$ e' limitata

Inoltre e' continua, ma non in $x=0$: $disc(f) = \{0\}$, presenta un numero finito di punti di discontinuità $\Longrightarrow$ La funzione e' integrabile in senso proprio.

$\underline{\int_3^{+\infty} f(x)\,dx:}$

seno e arcotangente sono continue in $[3,+\infty)$ cioè $C^0([3,+\infty))$

per $x \longrightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{x^3}$ e $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx < +\infty$

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \sim \frac{1}{6}\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx \left(\begin{matrix}\text{un problema}\\ \text{a } +\infty\end{matrix}\right) \Longrightarrow \int_3^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

Osservazione: facendo il limite del rapporto $\frac{f(x)}{1/x^3} \longrightarrow \frac{1}{6} > 0$ possiamo vedere che, per il teorema della permanenza del segno, $f(x)$ e' definitivamente positiva.

dunque siamo nelle ipotesi corrette per poter applicare il confronto asintotico.