*** Esercizio 2 (*Ghisi, Gobbino*)

Siano S_1 e S_2 le superfici di equazione rispettivamente

$$\cos(x) + \sin(y) + \tan(z) = 1 \qquad \sin(x) + \tan(y) + \cos(z) = 1$$

Sia V l'intersezione di S_1 e S_2, e sia P il punto di coordinate $P = (2\pi, 0, 0)$

1. Determinare le equazioni dei piani tangenti in P ad S_1 e S_2
2. Dimostrare che in un intorno del punto $P = (2\pi, 0, 0)$ l'insieme V coincide con il sostegno di una curva semplice di classe C^∞
3. Determinare la retta tangente a V nel punto $P = (2\pi, 0, 0)$

Soluzione dell'esercizio 2

1. Svolgimento del punto 1

L'equazione della superficie S_1 individua la funzione

$$f(x, y, z) = \cos(x) + \sin(y) + \tan(z) - 1$$

e il luogo degli zeri

$$Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x, y, z) = 0\right\}$$

Verifichiamo adesso le ipotesi e, quindi, l'applicabilità del teorema delle funzioni implicite (teorema del Dini) nel punto dato $(2\pi, 0, 0)$ affinché il luogo degli zeri di $f(x, y, z)$ sia il grafico di una funzione $\varphi(x, y)$ di classe C^∞ :

(a) $f(2\pi, 0, 0) = 0$

(b) $f(x, y, z)$ è continua e di classe C^∞ sulla palla aperta $B_{\pi/2}(P)$

(c) $f_z(x, y, z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$

(d) $f_z(P) = 1 \neq 0$

Dunque, esistono $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ ed un'unica funzione

$$\varphi \colon B_\delta(P) \to (-\sigma, \sigma) \quad \text{con} \quad |\sigma| < \frac{\pi}{2}$$

tale che

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in B_\delta(P)$$

φ è continua e $\varphi(2\pi, 0) = 0$

φ è di classe C^∞ su $B_\delta(P)$

Dunque, in un intorno del punto dato $P = (2\pi, 0, 0)$ vale la relazione

$$\varphi(x, y) = \arctan\big(1 - \cos(x) - \sin(y)\big)$$

A questo punto, sia $\Phi_1(x, y)$ la seguente parametrizzazione della superficie S_1 :

$$\Phi_1(x, y) = \big[x, y, \arctan\big(1 - \cos(x) - \sin(y)\big)\big]$$

Sia $J_1(x, y)$ la sua matrice Jacobiana :

$$J_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sin(x)}{1+[1-\cos(x)-\sin(y)]^2} \\ 0 & 1 & \frac{-\cos(y)}{1+[1-\cos(x)-\sin(y)]^2} \end{pmatrix}$$

e

$$M_1(x,y) = -\frac{\sin(x)}{1+[1-\cos(x)-\sin(y)]^2} \qquad M_2(x,y) = -\frac{\cos(y)}{1+[1-\cos(x)-\sin(y)]^2} \qquad M_3(x,y) = 1$$

i determinanti dei suoi minori di ordine 2 che, nel punto P assegnato, assumono i valori

$$M_1(2\pi,0) = 0 \qquad M_2(2\pi,0) = -1 \qquad M_3(2\pi,0) = 1$$

Dunque, dalla formula che definisce il piano tangente ad una superficie per $(x,y) = (x_0,y_0)$

$$M_1(x_0,y_0)(x-x_0) - M_2(x_0,y_0)(y-y_0) + M_3(x_0,y_0)(z-z_0) = 0$$

abbiamo che l'equazione del piano tangente alla superficie S_1 nel punto $P = (2\pi,0,0)$ è data da

$$y+z=0$$

Ragionando in modo identico, per la superficie S_2 otteniamo che

$$\Phi_2(x,z) = \big[x, \arctan\big(1-\sin(x)-\cos(z)\big), z\big]$$

$$J_2(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\cos(x)}{1+[1-\sin(x)-\cos(z)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(z)}{1+[1-\sin(x)-\cos(z)]^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1(x,z) = \frac{-\cos(x)}{1+[1-\sin(x)-\cos(z)]^2} \qquad M_2(x,z) = 1 \quad M_3(x,z) = \frac{\sin(z)}{1+[1-\sin(x)-\cos(z)]^2}$$

$$M_1(2\pi,0) = -1 \qquad M_2(2\pi,0) = 1 \qquad M_3(2\pi,0) = 0$$

Dunque, l'equazione del piano tangente alla superficie S_2 nel punto $P = (2\pi,0,0)$ è data da

$$x+y=2\pi$$

2. Svolgimento del punto 2

La risposta al quesito 2 discende direttamente dall'enunciato del teorema del Dini per i sistemi. Infatti, è

$$V\colon \begin{cases} f_1(x,y,z) = \cos(x)+\sin(y)+\tan(z)-1=0 \\ f_2(x,y,z) = \sin(x)+\tan(y)+\cos(z)-1=0 \end{cases}$$

una funzione di classe C^∞ nella palla aperta $B_{\pi/2}(P)$ di centro P e raggio $\pi/2$ di $\mathbb{R}^3$.
Nel punto dato $P = (2\pi,0,0)$ è $V(P) = 0$.
I determinanti jacobiani sono dati da

$$J_1 = \det\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \cos(y) & \frac{1}{\cos^2(y)} \\ \frac{1}{\cos^2(z)} & -\sin(z) \end{vmatrix} \implies J_1(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$J_2 = \det\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos^2(z)} & -\sin(z) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} \implies J_2(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$J_3 = \det\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\sin(x) & \cos(x) \\ \cos(y) & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{vmatrix} \implies J_3(P) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

e, essendone almeno uno $\neq 0$, l'insieme degli zeri di V, indicato con Z

$$Z = \big\{(x,y,z) \in B_{\pi/2}(P)\colon V(x,y,z) = 0\big\}$$

in un intorno di P coincide con il sostegno di una curva regolare e semplice γ. Infatti, considerando ad esempio $J_1 \neq 0$, in un intorno di P l'insieme Z coincide con il grafico di una funzione $\varphi(x)$ di classe C^∞ definita in un intorno $(2\pi-\delta, 2\pi+\delta)$ a valori in $\mathbb{R}^2$.
Pertanto Z coincide con il sostegno di una curva regolare γ di equazioni parametriche

$$\gamma\colon \big(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)\big) \qquad \text{con} \qquad x \in (2\pi-\delta, 2\pi+\delta)$$

3. Svolgimento del punto 3

La retta tangente a γ nel punto P è parallela al vettore avente per componenti i determinanti jacobiani calcolati in P.
Dunque, l'equazione parametrica della retta cercata è

$$r\colon \begin{cases} x = 2\pi - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$