Soluzione quarto esercizio secondo appello

1 Soluzione a

La risposta é negativa in quanto il funzionale non é ben definito da l^1 in l^1. Basta infatti prendere come

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Si osserva che x_n sta in l^1, invece si ottiene che:

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1},$$

che non sta in l^1

2 Soluzione b

La risposta é affermativa, andremo a verificare che: $\|y_n\|_{l^2} \leq C\|x_n\|_{l^1}$.

$$\begin{aligned}\|y_n\|_{l^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \right)^2 = \|x_n\|_{l^1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = C\|x_n\|_{l^1}^2.\end{aligned}$$

Si conclude facendo la radice quadrata.

3 Soluzione c

Anche in questo caso la risposta é affermativa. Osserviamo che le successioni convergenti stanno in l^∞, quindi lo spazio c eredita la norma di l^∞.

$$\|y_n\|_c = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sup_n \frac{n\|x_n\|_c}{n} = \|x_n\|_c.$$

4 Soluzione d

La risposta é negativa. Basta far vedere che esiste una successione limitata in l^∞, la cui immagine non ammette sottosuccessione limitata. Prendiamo quindi:

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n \leq k \\ 0 & \text{if} \quad n > k \end{cases}$$

Si osserva che $\|x^k\|_{l^\infty} = 1$ per ogni k, quindi é limitata. Ma presi $k_1 < k_2$ in $\mathbb{N}$ si ha che:

$$\begin{aligned} \|y^{k_2} - y^{k_1}\|_{l^\infty} &= \sup_n \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n x_i^{k_2} - \sum_{i=1}^n x_i^{k_1} \right| \\ &= \max \left\{ \sup_{n \leq k_1} 0, \quad \sup_{k_1 < n < k_2} \frac{n - k_1}{n}, \quad \sup_{n \geq k_2} \frac{k_2 - k_1}{n} \right\} \\ &= 1 - \frac{k_1}{k_2} \end{aligned}$$

Adesso preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ supponiamo esista un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k_1, k_2 \geq k_0$ valga:

$$\|y^{k_2} - y^{k_1}\|_{l^\infty} < \frac{1}{2}$$

Osservo che questo é impossibile perché se $k_2 = 2k_1 + 1$ quella norma é maggiore di un mezzo. Questo mostra che $\{y^k\}$ non é di Cauchy in l^∞, quindi non puó avere sottosuccessioni convergenti.