Calcolare gli integrali delle funzioni $f$ sui domini dati $\Omega$. I domini $\Omega$ vengono assegnati mediante una caratterizzazione del loro bordo. Se tale bordo viene indicato con un'unione si deve intendere: delimitato dalla curva (risp. superficie)... e dalla curva (risp. superficie)...

## **** Esercizio 14 (*Ghisi, Gobbino*)

Siano dati il bordo del dominio $\Omega$

$$\partial\Omega = \Big\{ \big(\sin(t),\, \cos(v),\, \cos^3(t)\big),\ (t,v) \in [0,\, 2\pi] \times [0,\, \pi] \Big\} \cup \Big\{ y = 1 \Big\} \cup \Big\{ y = -1 \Big\}$$

e la funzione $f$

$$f(x,y,z) = 1$$

### Soluzione dell'esercizio 14

Proviamo a risolvere l'esercizio ricorrendo alla formula di Gauss-Green:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{div}\vec{E}\, dx\, dy\, dz = -\int_\Omega \nabla f \cdot \vec{E}\, dx\, dy\, dz + \int_{\partial\Omega} f\, \vec{E} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$$

Scegliamo opportunamente il campo di vettori $\vec{E}$ in modo tale che sia $\mathrm{div}\vec{E} = 1$, ad esempio

$$\vec{E} = \big(x, 0, 0\big)$$

Il problema ci fornisce poi i seguenti dati:

$$f(x,y,z) = 1 \implies \nabla f = \big(0,0,0\big) \implies \nabla f \cdot \vec{E} = 0$$

Dunque, ci siamo ridotti a risolvere soltanto il secondo integrale a destra presente nella formula, cioè l'integrale sulla superficie che racchiude il dominio $\Omega$.
Essendo $\Omega$ il cilindro con asse coincidente con l'asse $y$ e basi date dalle superfici piane racchiuse dalla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ z(t) = \cos^3(t) \end{cases} \qquad t \in [0,\, 2\pi]$$

poste rispettivamente a distanza $\pm 1$ dall'origine, i loro versori normali saranno dati da

$$\vec{\nu_1} = (0,1,0) \qquad \text{e} \qquad \vec{\nu_2} = (0,-1,0)$$

Pertanto, avremo che

$$\vec{E} \cdot \vec{\nu_1} = \vec{E} \cdot \vec{\nu_2} = 0$$

Ci siamo ulteriormente ridotti, quindi, a risolvere un unico integrale, quello relativo alla superficie laterale del cilindro $\Omega$, la cui normale $\vec{\nu}$ andiamo a calcolare adesso attraverso la matrice jacobiana ed i suoi minori:

$$J(t,v) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -3\cos^2(t)\sin(t) \\ 0 & -\sin(v) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{da cui segue che}$$

$$M_1 = -3\sin(v)\cos^2(t)\sin(t) \qquad M_2 = 0 \qquad M_3 = -\cos(t)\sin(v)$$

Dunque, le componenti del versore $\vec{\nu}$, a meno di un fattore moltiplicativo che ne rende la norma uguale ad 1, sono date da

$$\vec{\nu} = \big(M_1,\, -M_2,\, M_3\big)$$

Per individuare il verso corretto di $\vec{\nu}$, cioè quello uscente dalla superficie, possiamo osservare che, quando le componenti $x(t,v)$ e $z(t,v)$ della superficie sono positive, anche le corrispondenti componenti di $\vec{\nu}$ lo devono essere. Considerando anche la sola componente $M_1$ del versore, vediamo che, per $v \in [0,\pi]$, il suo segno è determinato da $-\sin(t)$, che è evidentemente opposto a quello di $x(t,v)$. In conclusione, quindi, dobbiamo cambiare di segno alle componenti di $\vec{\nu}$.

A questo punto, abbiamo che

$$\vec{E} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = 3 \sin(v) \sin^2(t) \cos^2(t)\, dt\, dv$$

e l'integrale da risolvere diventa

$$\int_{\partial\Omega} f\, \vec{E} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = 3 \int_0^{\pi} \sin(v)\, dv \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t)\, dt$$

Risolvendo separatamente i due integrali a destra, otteniamo che

$$3 \int_0^{\pi} \sin(v)\, dv = 3 \Big[ - \cos(v) \Big]_0^{\pi} = 6$$

mentre per il secondo abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t)\, dt &= \Big[ \frac{1}{2} \big(t + \sin(t)\cos(t)\big) \sin^2(t) - \int \big(t + \sin(t)\cos(t)\big) \sin(t)\cos(t)\, dt \Big]_0^{2\pi} \\ &= - \Big[ \int_0^{2\pi} t \cos(t) \sin(t)\, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t)\, dt \Big] \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t)\, dt &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \cos(t) \sin(t)\, dt = -\frac{1}{2} \Big[ \frac{t}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{2} \int \sin^2(t)\, dt \Big]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \Big[ \frac{t}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{4} \big(t - \sin(t)\cos(t)\big) \Big]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dunque, in conclusione abbiamo che il valore dell'integrale di partenza è dato da

$$\int_{\partial\Omega} f\, \vec{E} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \frac{3}{2}\pi$$