

Calcolare gli integrali delle funzioni f sui domini dati Ω . I domini Ω vengono assegnati mediante una caratterizzazione del loro bordo. Se tale bordo viene indicato con un'unione si deve intendere: delimitato dalla curva (risp. superficie)... e dalla curva (risp. superficie)...

****** Esercizio 14** (*Ghisi, Gobbino*)

Siano dati il bordo del dominio Ω

$$\partial\Omega = \{(\sin(t), \cos(v), \cos^3(t)), (t, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\} \cup \{y = 1\} \cup \{y = -1\}$$

e la funzione f

$$f(x, y, z) = 1$$

Soluzione dell'esercizio 14

Proviamo a risolvere l'esercizio ricorrendo alla formula di Gauss-Green:

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \vec{E} \, dx \, dy \, dz + \int_{\partial\Omega} f \vec{E} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

Scegliamo opportunamente il campo di vettori \vec{E} in modo tale che sia $\operatorname{div} \vec{E} = 1$, ad esempio

$$\vec{E} = (x, 0, 0)$$

Il problema ci fornisce poi i seguenti dati:

$$f(x, y, z) = 1 \implies \nabla f = (0, 0, 0) \implies \nabla f \cdot \vec{E} = 0$$

Dunque, ci siamo ridotti a risolvere soltanto il secondo integrale a destra presente nella formula, cioè l'integrale sulla superficie che racchiude il dominio Ω .

Essendo Ω il cilindro con asse coincidente con l'asse y e basi date dalle superfici piane racchiuse dalla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ z(t) = \cos^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

poste rispettivamente a distanza ± 1 dall'origine, i loro versori normali saranno dati da

$$\vec{\nu}_1 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{\nu}_2 = (0, -1, 0)$$

Pertanto, avremo che

$$\vec{E} \cdot \vec{\nu}_1 = \vec{E} \cdot \vec{\nu}_2 = 0$$

Ci siamo ulteriormente ridotti, quindi, a risolvere un unico integrale, quello relativo alla superficie laterale del cilindro Ω , la cui normale $\vec{\nu}$ andiamo a calcolare adesso attraverso la matrice jacobiana ed i suoi minori:

$$J(t, v) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -3\cos^2(t)\sin(t) \\ 0 & -\sin(v) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui segue che}$$

$$M_1 = -3\sin(v)\cos^2(t)\sin(t) \quad M_2 = 0 \quad M_3 = -\cos(t)\sin(v)$$

Dunque, le componenti del versore $\vec{\nu}$, a meno di un fattore moltiplicativo che ne rende la norma uguale ad 1, sono date da

$$\vec{\nu} = (M_1, -M_2, M_3)$$

Per individuare il verso corretto di $\vec{\nu}$, cioè quello uscente dalla superficie, possiamo osservare che, quando le componenti $x(t, v)$ e $z(t, v)$ della superficie sono positive, anche le corrispondenti componenti di $\vec{\nu}$ lo devono essere. Considerando anche la sola componente M_1 del versore, vediamo che, per $v \in [0, \pi]$, il suo segno è determinato da $-\sin(t)$, che è evidentemente opposto a quello di $x(t, v)$. In conclusione, quindi, dobbiamo

cambiare di segno alle componenti di $\vec{\nu}$.

A questo punto, abbiamo che

$$\vec{E} \cdot \vec{\nu} d\sigma = 3 \sin(v) \sin^2(t) \cos^2(t) dt dv$$

e l'integrale da risolvere diventa

$$\int_{\partial\Omega} f \vec{E} \cdot \vec{\nu} d\sigma = 3 \int_0^\pi \sin(v) dv \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt$$

Risolvendo separatamente i due integrali a destra, otteniamo che

$$3 \int_0^\pi \sin(v) dv = 3 \left[-\cos(v) \right]_0^\pi = 6$$

mentre per il secondo abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt &= \left[\frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) \sin^2(t) - \int (t + \sin(t) \cos(t)) \sin(t) \cos(t) dt \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi - \left[\int_0^{2\pi} t \cos(t) \sin(t) dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt \right] \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \cos(t) \sin(t) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{2} \int \sin^2(t) dt \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t}{2} \sin^2(t) - \frac{1}{4} (t - \sin(t) \cos(t)) \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dunque, in conclusione abbiamo che il valore dell'integrale di partenza è dato da

$$\int_{\partial\Omega} f \vec{E} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \frac{3}{2} \pi$$